MATEMÁTICA

J GABARITO

Com resolução

(2ª PARTE)

KUMON

Dezembro / 2002

KUMON INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

ESTÁGIO J - MATEMÁTICA

Bloco	Assunto	TPR
1 ~ 10	Produtos Polinomiais	5 ~ 8
11 ~ 20	Fatoração I	5 ~ 8
21 ~ 30	Fatoração II	5 ~ 8
31 ~ 40	Fatoração III	6 ~ 10
41 ~ 50	Fatoração IV	6~ 10
51 ~ 60	Fatoração V	7 ~ 12
61 ~ 70	Frações algébricas	6 ~ 10
71 ~ 80	Números Irracionais I	5 ~ 8
81 ~ 90	Números Irracionais II	6~ 10
91 ~ 100	Equação do 2º grau I	5 ~ 8
101 ~ 110	Equação do 2º grau II	6 ~ 10
111 ~ 120	Números Complexos e Equação do 2º grau	6 ~ 10
121 ~ 130	Discriminante	6 ~ 10
131 ~ 140	Relação entre raízes e coeficientes	6 ~ 10
141 ~ 150	Sistemas de equações	6 ~ 10
151 ~ 160	Divisão de Polinômios	6 ~ 10
161 ~ 170	Teorema do Resto	6 ~ 10
171 ~ 180	Teorema dos Fatores	6 ~ 10
181 ~ 190	Identidade e igualdade	6 ~ 10
191 ~ 200	Igualdade e desigualdade	7 ~ 12

KUMON

J 101a Equações do 2º grau II

(10 pontos)

Fórmula de Báskara

Seja $ax^2+bx+c=0$, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Resolva as seguintes equações utilizando a Fórmula de Báskara.

(1) $3x^2+9x+2=0$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{81-24}}{6}$$

$$=\frac{\mathbf{-9\pm\sqrt{57}}}{\mathbf{6}}$$

(2) $2x^2+7x+1=0$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-8}}{4}$$

$$=\frac{\mathbf{-7\pm\sqrt{41}}}{\mathbf{4}}$$

(3) $4x^2+9x+3=0$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{81-48}}{8}$$

$$=\frac{\mathbf{-9\pm\sqrt{33}}}{\mathbf{8}}$$

(4) $3x^2-9x+2=0$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-24}}{6}$$

$$=\frac{\mathbf{9\pm\sqrt{57}}}{\mathbf{6}}$$

(5) $2x^2+7x-1=0$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49+8}}{4}$$

$$=\frac{\mathbf{-7\pm\sqrt{57}}}{\mathbf{4}}$$

(6) $3x^2+7x+2=0$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{6}$$

$$=\frac{-7\pm5}{6}$$

$$x=\mathbf{-2},\ \mathbf{-\frac{1}{3}}$$

(7) $3x^2-7x+2=0$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}$$

$$=\frac{7\pm5}{6}$$

$$x=\mathbf{\frac{1}{3}},\mathbf{2}$$

(8) $3x^2+5x-8=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{6}$$

$$=\frac{-5\pm11}{6}$$

$$x=\mathbf{-\frac{8}{3}},\mathbf{1}$$

(9) $3x^2+7x-6=0$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49+72}}{6}$$

$$=\frac{-7\pm11}{6}$$

$$x=\mathbf{-3},\ \mathbf{\frac{2}{3}}$$

(10) $*\ ax^2+2b'x+c=0\quad(a\neq0)$

(* Inserir a, $2b'$ e c na Fórmula de Báskara)

[Res.]

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(\mathbf{2b'})^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{\boxed{\mathbf{b'^2-ac}}}}{2a}$$

$$=\frac{\mathbf{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}}{\mathbf{a}}$$

J 102a Equações do 2º grau I I

(10 pontos)

Pelo resultado de J 101b (10) , quando o coeficiente de x for par temos a seguinte fórmula:

Fórmula de Báskara

Seja $ax^2+2b'x+c=0$, $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$.

Exemplo

$3x^2+10x+1=0$

[Res.] $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-3\times1}}{3}$ ☜ de $b'=5$

$=\dfrac{-5\pm\sqrt{22}}{3}$

1. Resolva as seguintes equações utilizando a Fórmula de Báskara acima.

(1) $3x^2+14x+5=0$

$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-15}}{3}$

$=\dfrac{\mathbf{-7\pm\sqrt{34}}}{\mathbf{3}}$

(2) $3x^2+8x+5=0$

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-15}}{3}$

$=\dfrac{-4\pm1}{3}$

$x=\mathbf{-\dfrac{5}{3}, -1}$

(3) $x^2-8x+5=0$

$x=4\pm\sqrt{16-5}$

$=\mathbf{4\pm\sqrt{11}}$

(4) $x^2+6x-3=0$

$x=-3\pm\sqrt{9+3}$

$=-3\pm\sqrt{12}$

$x=\mathbf{-3\pm2\sqrt{3}}$

J 102b

Fórmula I

Seja $ax^2+bx+c=0$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Fórmula II

Seja $ax^2+2b'x+c=0$,

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

2. Resolva as seguintes equações utilizando a fórmula mais conveniente.

(1) $4x^2+9x+1=0$

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{81-16}}{8}$$

$$=\frac{\mathbf{-9\pm\sqrt{65}}}{\mathbf{8}}$$

(2) $3x^2-10x+3=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}$$

$$=\frac{5\pm4}{3}$$

$$x=\mathbf{3},\ \mathbf{\frac{1}{3}}$$

(3) $x^2+8x-3=0$

$$x=-4\pm\sqrt{16+3}$$

$$=\mathbf{-4\pm\sqrt{19}}$$

(4) $-2x^2-7x+3=0$

$$2x^2+7x-3=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49+24}}{4}$$

$$=\frac{\mathbf{-7\pm\sqrt{73}}}{\mathbf{4}}$$

(5) $-2x^2-6x+7=0$

$$2x^2+6x-7=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+14}}{2}$$

$$=\frac{\mathbf{-3\pm\sqrt{23}}}{\mathbf{2}}$$

(6) $-2x^2-7x-3=0$

$$2x^2+7x+3=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{-7\pm5}{4}$$

$$x=\mathbf{-3},\ \mathbf{-\frac{1}{2}}$$

J 103a Equações do 2º grau II

(10 pontos)

Fórmula I

Seja $ax^2+bx+c=0$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Fórmula II

Seja $ax^2+2b'x+c=0$,

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

Resolva as seguintes equações utilizando a fórmula mais conveniente.

(1) $3x^2+14x+5=0$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-15}}{3}$$

$$=\frac{\mathbf{-7\pm\sqrt{34}}}{\mathbf{3}}$$

(2) $2x^2+6x+3=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-6}}{2}$$

$$=\frac{\mathbf{-3\pm\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

(3) $-x^2-8x+3=0$

$x^2+8x-3=0$

$x=-4\pm\sqrt{16+3}$

$=\mathbf{-4\pm\sqrt{19}}$

(4) $3x=3x^2-6$

$3x^2-3x-6=0$ ⇐ O número 3 é fator de todos os termos da equação.

$x^2-x-2=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$

$$=\frac{1\pm3}{2}$$

$x=\mathbf{2,\ -1}$

J 103b

(5) $4x+5=3x^2$

$3x^2-4x-5=0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+15}}{3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2\pm\sqrt{19}}{3}}$$

(6) $3x^2-8x-4=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+12}}{3}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{28}}{3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{4\pm2\sqrt{7}}{3}}$$

(7) $9x^2-12x+4=0$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{9}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(8) $x^2-10x+1=0$

$x=5\pm\sqrt{25-1}$

$=5\pm\sqrt{24}$

$=\boldsymbol{5\pm2\sqrt{6}}$

(9) $-3x^2-8x-5=0$

$3x^2+8x+5=0$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-15}}{3}$$

$$=\frac{-4\pm1}{3}$$

$$x=\boldsymbol{-\frac{5}{3},\ -1}$$

(10) $3x^2-9x+4=0$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-48}}{6}$$

$$=\boldsymbol{\frac{9\pm\sqrt{33}}{6}}$$

J 104a Equações do 2º grau II

(11 pontos)

Resolva as seguintes equações utilizando a Fórmula de Báskara ou a fatoração.

(1) $x^2-8x+12=0$

$(x-6)(x-2)=0$

$x=\mathbf{6, 2}$

(2) $x^2+9=6x$

$x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$

$x=\mathbf{3}$

(3) $-9x^2+6x-1=0$

$9x^2-6x+1=0$

$(3x-1)^2=0$

$x=\mathbf{\frac{1}{3}}$

(4) $5(x^2+2x-1)=-5$

$x^2+2x-1=-1$

$x^2+2x=0$

$x(x+2)=0$

$x=\mathbf{0, -2}$

(5) $3x^2+5x=8$

$3x^2+5x-8=0$

$(x-1)(3x+8)=0$

$x=\mathbf{1, -\frac{8}{3}}$

J 104b

(6) $3x^2 = 4 - 5x$

$3x^2 + 5x - 4 = 0$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 48}}{6}$

$= \boldsymbol{\dfrac{-5 \pm \sqrt{73}}{6}}$

(7) $3x^2 - 4x + 7 = 5x^2 - 7x + 8$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

$(x - 1)(2x - 1) = 0$

$x = \mathbf{1}, \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(8) $3x^2 - 4x - 1 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 3}}{3}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}}$

(9) $(x + 2)^2 - 3(x + 2) - 4 = 0$

$x^2 + 4x + 4 - 3x - 6 - 4 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x - 2)(x + 3) = 0$

$x = \mathbf{2}, \mathbf{-3}$

Outra solução

$(x + 2)^2 - 3(x + 2) - 4 = 0$

$[(x + 2) - 4][(x + 2) + 1] = 0$

$(x - 2)(x + 3) = 0$

$x = \mathbf{2}, \mathbf{-3}$

J 105a Equações do 2º grau II

(11 pontos)

Resolva as seguintes equações utilizando a Fórmula de Báskara ou a fatoração.

(1) $4x^2-15x+14=0$

$(x-2)(4x-7)=0$

$x=\mathbf{2},\ \mathbf{\frac{7}{4}}$

(2) $15x^2-23x-28=0$

$(3x-7)(5x+4)=0$

$x=\mathbf{\frac{7}{3}},\ \mathbf{-\frac{4}{5}}$

(3) $3x^2+16x-35=0$

$(x+7)(3x-5)=0$

$x=\mathbf{-7},\ \mathbf{\frac{5}{3}}$

(4) $-4x^2-16x+9=0$

$4x^2+16x-9=0$

$(2x+9)(2x-1)=0$

$x=\mathbf{-\frac{9}{2}},\ \mathbf{\frac{1}{2}}$

(5) $x(x+1)=56$

$x^2+x-56=0$

$(x+8)(x-7)=0$

$x=\mathbf{-8},\ \mathbf{7}$

J 105b

(6) $x^2=\frac{2}{3}(x+1)$

$3x^2-2x-2=0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{1+6}}{3}$

$x=\boldsymbol{\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}}$

(8) $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}-\frac{1}{6}=0$

$3x^2+4x-2=0$

$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+6}}{3}$

$x=\boldsymbol{\frac{-2\pm\sqrt{10}}{3}}$

(7) $\frac{x(x+1)}{2}=\frac{2x-3}{3}+1$

$3x(x+1)=2(2x-3)+6$

$3x^2+3x=4x$

$3x^2-x=0$

$x(3x-1)=0$

$x=\boldsymbol{0,\ \frac{1}{3}}$

(9) $0,2x^2+0,7x+0,3=0$

$2x^2+7x+3=0$

$(2x+1)(x+3)=0$

$x=\boldsymbol{-\frac{1}{2},\ -3}$

J 106a Equações do 2º grau II

(12 pontos)

Resolva as seguintes equações utilizando a Fórmula de Báskara e a fatoração.

(1) $6x^2+13x+6=0$

[Fórmula]

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{169-4\times6\times6}}{12}$$

$$=\frac{-13\pm\sqrt{25}}{12}$$

$$=\frac{-13\pm5}{12}$$

$$=-\frac{2}{3},-\frac{3}{2}$$

[Fatoração]

$$(3x+2)(2x+3)=0$$

$$x=-\frac{2}{3},-\frac{3}{2}$$

(2) $15x^2+x-2=0$

[Fórmula]

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{30}$$

$$=\frac{-1\pm11}{30}$$

$$x=\frac{1}{3},-\frac{2}{5}$$

[Fatoração]

$$(3x-1)(5x+2)=0$$

$$x=\frac{1}{3},-\frac{2}{5}$$

J 106b

(3) $4x^2-8x+3=0$

[Fórmula]

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{4}$$

$$=\frac{4\pm2}{4}$$

$$x=\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}$$

[Fatoração]

$$(2x-3)(2x-1)=0$$

$$x=\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}$$

(4) $12x^2+4x-5=0$

[Fórmula]

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{12}$$

$$=\frac{-2\pm8}{12}$$

$$x=-\frac{5}{6},\ \frac{1}{2}$$

[Fatoração]

$$(6x+5)(2x-1)=0$$

$$x=-\frac{5}{6},\ \frac{1}{2}$$

J 107a Equações do 2º grau II

(33 pontos)

Utilizando a Fórmula de Báskara, fatore a seguinte expressão.

Exemplo

$6x^2 - 13x + 6$

[Res.] As raízes de $6x^2 - 13x + 6 = 0$ são:

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12}$$

$$x = \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$$

A equação do 2º grau que apresenta estas raízes é:

$6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$ ☜ Multiplicar por 6 para obter o coeficiente de x^2.

$2\left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot 3\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$ ☜ Decompor o 6 em dois fatores, 2 e 3.

$(2x - 3)(3x - 2) = 0$

Sendo assim,

$6x^2 - 13x + 6 = (2x - 3)(3x - 2)$

(1) $12x^2 + 25x + 12$

[Res.] Resolvendo a equação:

$$12x^2 + 25x + 12 = 0$$

$$x = \frac{-25 \pm \sqrt{625 - 576}}{24} = \frac{-25 \pm 7}{24} = -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$$

A equação do 2º grau que apresenta estas raízes é :

$$12\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$4\left(x + \frac{3}{4}\right) \cdot 3\left(x + \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$(4x + 3)(3x + 4) = 0$$

Portanto:

$12x^2 + 25x^2 + 12 = \mathbf{(4x + 3)(3x + 4)}$

J 107b

(2) $15x^2 - 2x - 24$

[Res.] Resolvendo a equação:

$$15x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 360}}{15} = \frac{1 \pm 19}{15} = \frac{4}{3}, -\frac{6}{5}$$

A equação do 2º grau que apresenta estas raízes é :

$$15\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x + \frac{6}{5}\right) = 0$$

$$3\left(x - \frac{4}{3}\right) \cdot 5\left(x + \frac{6}{5}\right) = 0$$

$$(3x - 4)(5x + 6) = 0$$

Portanto:

$$15x^2 - 2x - 24 = \mathbf{(3x - 4)(5x + 6)}$$

(3) $3x^2 + 7x - 48$

[Res.] Resolvendo a equação:

$$3x^2 + 7x - 48 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 576}}{6} = \frac{-7 \pm 25}{6} = -\frac{16}{3}, 3$$

A equação do 2º grau que apresenta estas raízes é :

$$3\left(x + \frac{16}{3}\right)(x - 3) = 0$$

$$(3x + 16)(x - 3) = 0$$

Portanto:

$$3x^2 + 7x - 48 = \mathbf{(3x + 16)(x - 3)}$$

J 108a Equações do 2º grau II

(25 pontos)

Utilizando a Fórmula de Báskara, fatore a seguinte expressão.

(1) $x^2-\sqrt{2}\,x-12$

[Res.] Resolvendo a equação:

$$x^2-\sqrt{2}\,x-12=0$$

$$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+48}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{50}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm5\sqrt{2}}{2}$$

$$x=3\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}$$

Portanto:

$$x^2-\sqrt{2}\,-12=\boldsymbol{(x-3\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}$$

(2) $x^2-(2\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}$

[Res.] Resolvendo a equação:

$$x^2-(2\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}=0$$

$$x=\frac{(2\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2-4\times2\sqrt{3}}}{2}$$

$$=\frac{(2\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{12+4\sqrt{3}+1-8\sqrt{3}}}{2}$$

$$=\frac{(2\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{13-4\sqrt{3}}}{2}$$

$$=\frac{(2\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{13-2\sqrt{12}}}{2}$$

$$=\frac{(2\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{12}-1)^2}}{2}$$

$$=\frac{(2\sqrt{3}+1)\pm(2\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$x=2\sqrt{3},\ 1$$

Portanto:

$$x^2-(2\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}=\boldsymbol{(x-2\sqrt{3})(x-1)}$$

J 108b

(3) $x^2-(a-2b)x-2ab$

[Res.] Resolvendo a equação:

$$x^2-(a-2b)x-2ab=0$$

$$x=\frac{(a-2b)\pm\sqrt{(a-2b)^2+4\times 2ab}}{2}$$

$$=\frac{(a-2b)\pm\sqrt{a^2-4ab+4b^2+8ab}}{2}$$

$$=\frac{(a-2b)\pm\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}{2}$$

$$=\frac{(a-2b)\pm\sqrt{(a+2b)^2}}{2}$$

$$=\frac{(a-2b)\pm(a+2b)}{2}$$

$$x=a,\ -2b$$

Portanto:

$$x^2-(a-2b)x-2ab=\boldsymbol{(x-a)(x+2b)}$$

(4) $x^2-2ax+a^2-b^2$

[Res.] Resolvendo a equação:

$$x^2-2ax+a^2-b^2=0$$

$$x=a\pm\sqrt{a^2-(a^2-b^2)}$$

$$=a\pm\sqrt{b^2}$$

$$x=a\pm b$$

Portanto:

$$x^2-2ax+a^2-b^2=\boldsymbol{(x-a-b)(x-a+b)}$$

J 109a Equações do 2º grau II

(50 pontos)

Exemplo

Determine os valores de b, c e a outra raiz, quando uma das raízes da equação $x^2+bx+c=0$ for $1+\sqrt{2}$.

(Nota: a solução de uma equação é chamada raiz)

[Res.]

$(1+\sqrt{2})^2+b(1+\sqrt{2})+c=0$ ☜ Substituir $x=1+\sqrt{2}$ na equação original.

$3+2\sqrt{2}+b+\sqrt{2}\,b+c=0$

$(3+b+c)+(2+b)\sqrt{2}=0$ ⤶ Ordenar a equação em função de $\sqrt{2}$.

Temos então:

$\begin{cases} 3+b+c=0 & \cdots ① \\ 2+b=0 & \cdots ② \end{cases}$ ⤶ Para esta equação ser verdadeira temos: $3+b+c=0$ e $2+b=0$.

De ① e ② temos $b=-2, c=-1$.

$x^2-2x-1=0$

$x=1\pm\sqrt{2}$ ☜ Substituindo $b=-2, c=-1$ na equação original.

A outra raiz é: $1-\sqrt{2}$

1. Determine os valores de b, c e a outra raiz, quando uma das raízes da equação do 2º grau $x^2+bx+c=0$ for $-1+\sqrt{2}$.

[Res.] $(-1+\sqrt{2})^2+b(-1+\sqrt{2})+c=0$

$3-2\sqrt{2}-b+\sqrt{2}\,b+c=0$

$(3-b+c)-(2-b)\sqrt{2}=0$

Podemos obter duas equações,

$\begin{cases} 3-b+c=0 & \cdots ① \\ 2-b=0 & \cdots ② \end{cases}$

De ① e ② , $\boldsymbol{b=2}$ e $\boldsymbol{c=-1}$

Então,

$x^2+2x-1=0$

e $x=-1\pm\sqrt{2}$

Portanto a outra raiz é $\boldsymbol{-1-\sqrt{2}}$.

J 109b

2. Determine os valores de a, b e a outra raiz, quando uma das raízes da equação do 2º grau $ax^2+bx+2=0$ for $2-\sqrt{2}$.

[Res.] $a(2-\sqrt{2})^2+b(2-\sqrt{2})+2=0$

$a(6-4\sqrt{2})+b(2-\sqrt{2})+2=0$

$6a-4\sqrt{2}\,a+2b-\sqrt{2}\,b+2=0$

$(6a+2b+2)-(4a+b)\sqrt{2}=0$

Podemos obter duas equações,

$$\begin{cases} 6a+2b+2=0 & \cdots ① \\ 4a+b=0 & \cdots ② \end{cases}$$

De ① e ② , $\boldsymbol{a=1}$ e $\boldsymbol{b=-4}$

Então,

$x^2-4x+2=0$

e $x=2\pm\sqrt{2}$

Portanto a outra raiz é $\boldsymbol{2+\sqrt{2}}$.

Importante

① Seja: $\boldsymbol{x^2-6x+8=(x-4)(x-2)}$

As raízes de: $\boldsymbol{x^2-6x+8=0}$ são: $\boldsymbol{x=4,\ 2}$

- Usando-se as raízes $\boldsymbol{x=4,\ 2}$ da equação $\boldsymbol{x^2-6x+8=0}$ podemos fatorar como $\boldsymbol{x^2-6x+8=(x-4)(x-2)}$.

② Quando a equação do 2º grau $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ apresenta raízes irracionais, tanto $\boldsymbol{x_1=\alpha+\sqrt{\beta}}$ como $\boldsymbol{x_2=\alpha-\sqrt{\beta}}$ são suas raízes.

J 110a Equações do 2º grau II

(12 pontos)

Resolva as seguintes equações do 2º grau:

(1) $7x^2+32x-15=0$

$(x+5)(7x-3)=0$

$x=\mathbf{-5,\ \frac{3}{7}}$

(2) $x^2-x-3=0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{1+12}}{2}$

$=\mathbf{\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}}$

(3) $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{x^2-1}{2}-1=0$

$2(x-1)^2-3(x^2-1)-6=0$

$-x^2-4x-1=0$

$x^2+4x+1=0$

$x=-2\pm\sqrt{4-1}$

$=\mathbf{-2\pm\sqrt{3}}$

(4) $0,2x^2-0,5x-1,2=0$

(Multiplicando ambos os lados da equação por 10.)

$2x^2-5x-12=0$

$(2x+3)(x-4)=0$

$x=\mathbf{-\frac{3}{2},\ 4}$

(5) $(x-4)(2x-3)=12$

$2x^2-11x=0$

$x(2x-11)=0$

$x=\mathbf{0,\ \frac{11}{2}}$

(6) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}x^2$

$4x+3=x^2$

$x^2-4x-3=0$

$x=2\pm\sqrt{4+3}$

$=\mathbf{2\pm\sqrt{7}}$

J 110b

2. Determine o valor de a, quando uma das raízes da equação do 2º grau $x^2 - 3x + a = 0$ for 6. Determine também o valor da outra raiz.

$36 - 18 + a = 0$

$18 + a = 0$

$a = -18$

$x^2 - 3x - 18 = 0$

$(x - 6)(x + 3) = 0$

$x = 6, \ -3$

Então, $\boldsymbol{a = -18}$, e a outra raiz é $\boldsymbol{x = -3}$.

3. Determine o valor de a, quando uma das raízes da equação do 2º grau $x^2 + 6x + a = 0$ for $x = -3 + \sqrt{17}$. Determine também o valor da outra raiz.

$(-3 + \sqrt{17})^2 + 6(-3 + \sqrt{17}) + a = 0$

$26 - 6\sqrt{17} - 18 + 6\sqrt{17} + a = 0$

$8 + a = 0$

$a = -8$

$x^2 + 6x - 8 = 0$

$x = -3 \pm \sqrt{9 + 8}$

$= -3 \pm \sqrt{17}$

Então, $\boldsymbol{a = -8}$, e a outra raiz é $\boldsymbol{x = -3 - \sqrt{17}}$.

J 111a Números complexos e equações do 2º grau

(5 pontos)

1. Efetue os seguintes cálculos:

(1) $2^2 = 4$

(2) $5^2 = 25$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

(4) $(\sqrt{2})^2 = 2$

(5) $(\sqrt{3})^2 = 3$

(6) $(-2)^2 = 4$

(7) $(-5)^2 = 25$

(8) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

(9) $(-\sqrt{2})^2 = 2$

(10) $(-\sqrt{3})^2 = 3$

Números positivos, negativos e o zero pertencem ao conjunto dos números reais. Elevando um número positivo ou um número negativo ao quadrado, tem-se um número positivo. O número zero elevado ao quadrado resulta em zero.

Isso é válido para todo número real. Vamos pensar em um número que não é um número real e que elevado ao quadrado resulte negativo.

Ao número que elevado ao quadrado resulta -1, representamos com a letra i. (a este i dá-se o nome de unidade imaginária).

$$i^2 = -1 \quad (\sqrt{-1} = i)$$

J 111b

2. Represente os seguintes números utilizando o i:

Exemplo

$\sqrt{-5}=\sqrt{5}\,i \quad \sqrt{-4}=\sqrt{4}\,i=2i \quad \sqrt{-8}=\sqrt{8}\,i=2\sqrt{2}\,i$

(1) $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i$

(2) $\sqrt{-6}=\sqrt{6}\,i$

(3) $\sqrt{-9}=3i$

(4) $\sqrt{-12}=2\sqrt{3}\,i$

(5) $\sqrt{-18}=3\sqrt{2}\,i$

(6) $\sqrt{-\frac{1}{25}}=\sqrt{\frac{1}{25}}\,i=\frac{1}{5}i$

(7) $\sqrt{-\frac{3}{16}}=\sqrt{\frac{3}{16}}\,i=\frac{\sqrt{3}}{4}i$

Se $a\geq 0$, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$

J 112a Números complexos e equações do 2º grau

(6 pontos)

Efetue os seguintes cálculos lembrando que $\boxed{i^2 = -1}$.

Exemplo

$(2i)^2 = 2i \times 2i = 2^2 \cdot i^2 = 4 \times (-1) = -4$

$(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \times (-1) = -4$

$(\sqrt{2}\,i)^2 = (\sqrt{2}\,)^2 \cdot i^2 = 2 \times (-1) = -2$

(1) $(3i)^2 = 3i \times 3i = 3^2 \cdot i^2 = 9 \times (-1) = \mathbf{-9}$

(2) $(-3i)^2 = (-3)^2 \cdot i^2 = 9 \times (-1) = \mathbf{-9}$

(3) $(4i)^2 = 16i^2 = \mathbf{-16}$

(4) $(-7i)^2 = 49i^2 = \mathbf{-49}$

(5) $(\sqrt{3}\,i)^2 = (\sqrt{3}\,)^2 \cdot i^2 = \mathbf{-3}$

(6) $(-\sqrt{3}\,i)^2 = (-\sqrt{3}\,)^2 \cdot i^2 = \mathbf{-3}$

(7) $(\sqrt{5}\,i)^2 = 5i^2 = \mathbf{-5}$

(8) $(2\sqrt{2}\,i)^2 = 8i^2 = \mathbf{-8}$

J 112b

Exemplo

$3i \times 2i = 6i^2 = -6$ (Atenção!) $i^2 = -1$

(9) $3i \times 4i = 12i^2 = \mathbf{-12}$

(10) $3i \times (-4i) = -12i^2 = \mathbf{12}$

(11) $\sqrt{3}\, i \times 2i = 2\sqrt{3}\, i^2 = \mathbf{-2\sqrt{3}}$

(12) $(-\sqrt{3}\, i) \times 4i = -4\sqrt{3}\, i^2 = \mathbf{4\sqrt{3}}$

Exemplo

$\sqrt{-4} \times \sqrt{-25} = 2i \times 5i = 10i^2 = -10$

(13) $\sqrt{-9} \times \sqrt{-16} = 3i \times 4i = 12i^2 = \mathbf{-12}$

(14) $2\sqrt{-2} \times 3\sqrt{-3} = 2\sqrt{2}\, i \times 3\sqrt{3}\, i = 6\sqrt{6}\, i^2 = \mathbf{-6\sqrt{6}}$

(15) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = 2i \times 3i = 6i^2 = \mathbf{-6}$

(16) $\sqrt{(-4) \times (-9)} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$

ATENÇÃO: $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ não é válido quando $a < 0$, $b < 0$.

Isto se percebe pelos resultados (15) e (16).

J 113a Números complexos e equações do 2º grau

(8 pontos)

Efetue os seguintes cálculos:

Exemplo

$\sqrt{-4} \div \sqrt{16} = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$

$\sqrt{4} \div \sqrt{-16} = \frac{2}{4i} = \frac{2i}{4i^2} = \frac{2i}{-4} = -\frac{1}{2}i$

Multiplica-se por i o numerador e o denominador de $\frac{2}{4i}$ para eliminar o i do denominador.

(1) $\sqrt{-9} \div \sqrt{16} = \mathbf{\frac{3i}{4} = \frac{3}{4}i}$

(2) $\sqrt{9} \div \sqrt{-16} = \frac{3}{4i} = \frac{3i}{4i^2} = \frac{3i}{-4} = \mathbf{-\frac{3}{4}i}$

(3) $\sqrt{-9} \div \sqrt{25} = \mathbf{\frac{3i}{5} = \frac{3}{5}i}$

(4) $\sqrt{9} \div \sqrt{-25} = \frac{3}{5i} = \frac{3i}{5i^2} = \frac{3i}{-5} = \mathbf{-\frac{3}{5}i}$

(5) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{-25}} = \frac{3}{5i} = \frac{3i}{5i^2} = \frac{3i}{-5} = \mathbf{-\frac{3}{5}i}$

(6) $\sqrt{\frac{9}{-25}} = \sqrt{-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}}i = \mathbf{\frac{3}{5}i}$

ATENÇÃO: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ não é válido quando $a > 0$, $b < 0$.

Isto se percebe pelos resultados (5) e (6).

J 113b

Exemplo

$(2+i)(3+2i) = 6+7i+2i^2 = 4+7i$

(7) $(2-i)(3+2i) = 6+i-2i^2 = \mathbf{8+i}$

(8) $(3-2i)(1+3i) = 3+7i-6i^2 = \mathbf{9+7i}$

(9) $(2+\sqrt{2}\,i)(3+\sqrt{2}\,i) = 6+5\sqrt{2}\,i+2i^2 = \mathbf{4+5\sqrt{2}\,i}$

(10) $(5+\sqrt{3}\,i)(4-\sqrt{3}\,i) = 20-\sqrt{3}\,i-3i^2 = \mathbf{23-\sqrt{3}\,i}$

(11) $(3+2i)(3-2i) = 9-4i^2 = \mathbf{13}$

(12) $(3+2i)^2 = 9+12i+4i^2 = \mathbf{5+12i}$

$3+2i$ e $4-3i$ são chamados números complexos.

Os números complexos são representados por $a+bi$ (onde a, b são números reais).

Quando no número complexo $a+bi$, $b=0$, o número representa um número real, pois $a+0\cdot i = a$.

Quando $b \neq 0$ chamamos o número complexo $a+bi$ de número imaginário.

J 114 a Números complexos e equações do 2º grau

(8 pontos)

Efetue os seguintes cálculos:

(1) $(2+\sqrt{-2})(3+\sqrt{-2}) = 6+5\sqrt{2}\,i+2i^2 = \mathbf{4+5\sqrt{2}\,i}$

(2) $(2-5\sqrt{2}\,i)(3+4\sqrt{2}\,i) = 6-7\sqrt{2}\,i-40i^2 = \mathbf{46-7\sqrt{2}\,i}$

(3) $(4-\sqrt{-2})(4+\sqrt{-2}) = 16-2i^2 = \mathbf{18}$

(4) $(\sqrt{3}\,i+2)^2 = 3i^2+4\sqrt{3}\,i+4 = \mathbf{1+4\sqrt{3}\,i}$

(5) $(\sqrt{-5}+1)^2 = -5+2\sqrt{5}\,i+1 = \mathbf{-4+2\sqrt{5}\,i}$

(6) $(-3-2\sqrt{-2})^2 = (-3-2\sqrt{2}\,i)^2 = 9+12\sqrt{2}\,i+8i^2$

$= \mathbf{1+12\sqrt{2}\,i}$

J 114b

Exemplo

$$\frac{3-i}{3+2i}=\frac{(3-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{7-9i}{9+4}=\frac{7-9i}{13}$$

Multiplica-se o numerador e o denominador de $\frac{3-i}{3+2i}$ por $(3-2i)$.

(7) $\frac{1+i}{3+2i}=\frac{(1+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{3+i-2i^2}{9+4}=\mathbf{\frac{5+i}{13}}$

(8) $\frac{5-i}{2-3i}=\frac{(5-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{10+13i-3i^2}{4+9}=\frac{13+13i}{13}=\mathbf{1+i}$

(9) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1+1}=\frac{2i}{2}=\mathbf{i}$

(10) $\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-4i+i^2}{4+1}=\mathbf{\frac{3-4i}{5}}$

(11) $\frac{1}{2-i}+\frac{1}{2+i}=\frac{(2+i)+(2-i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{4}{4+1}=\mathbf{\frac{4}{5}}$

(12) $\frac{i}{2-i}-\frac{i}{2+i}=\frac{i(2+i)-i(2-i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2i+i^2-2i+i^2}{4+1}=\mathbf{-\frac{2}{5}}$

J 115 a Números complexos e equações do 2º grau

(9 pontos)

1. Efetue os seguintes cálculos:

Exemplo

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)^2 = 1$

(1) $i^5 = \boldsymbol{i}$

(2) $i^6 = \boldsymbol{-1}$

(3) $i^7 = \boldsymbol{-i}$

(4) $i^8 = \boldsymbol{1}$

(5) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1.i}{i \cdot i} = \dfrac{i}{i^2} = \dfrac{i}{-1} = \boldsymbol{-i}$

(6) $\dfrac{1}{i^2} = \boldsymbol{-1}$

(7) $\dfrac{1}{i^3} = \dfrac{1}{i^2 \cdot i} = -\dfrac{1}{i} = -\dfrac{i}{i^2} = -\dfrac{i}{-1} = \boldsymbol{i}$

(8) $\dfrac{1}{i^4} = \boldsymbol{1}$

2. Determine os números reais x e y que satisfaçam as seguintes igualdades.

Exemplo

$(x+y)+(x-y)i=7+3i$ ☜ Se ① $x+y=7$ e ② $x-y=3$ satisfazem a igualdade.

[Res.] Comparando ambos os membros da equação:

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots ① \\ x-y=3 & \cdots ② \end{cases}$$

De ① e ②,

$x=5,\ y=2$

(1) $(2x-y)+(y-x)i=1+3i$

$$\begin{cases} 2x-y=1 & \cdots ① \\ -x+y=3 & \cdots ② \end{cases}$$

De ① + ②,

$x=4$

Substituindo este valor em ②,

$y=7$

Então, $\boldsymbol{x=4}$ e $\boldsymbol{y=7}$.

(2) $(1+i)x-(1-2i)y=1+4i$

$(\boldsymbol{x-y})+(\boldsymbol{x+2y})i=1+4i$

$$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ① \\ x+2y=4 & \cdots ② \end{cases}$$

De ① - ②,

$y=1$

Substituindo este valor em ①,

$x=2$

Então, $\boldsymbol{x=2}$ e $\boldsymbol{y=1}$.

Dois números complexos $a+bi$ e $c+di$ são iguais, se e somente se, $a=c$ e $b=d$.

$$a+bi=c+di \quad \Leftrightarrow \quad a=c,\ b=d$$

Especialmente se: $a+bi=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=0,\ b=0.$

⇔ significa "se e somente se"

J 116a Números complexos e equações do 2º grau

(12 pontos)

Fórmula I

Seja: $ax^2+bx+c=0$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Fórmula II

Seja: $ax^2+2b'x+c=0$,

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

Exemplo

$3x^2+5x-7=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot3\cdot(-7)}}{6}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{109}}{6}$$

Exemplo

$5x^2-8x+4=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{5}$$

$$=\frac{4\pm2i}{5}$$

Fazendo-se: $\sqrt{-4}=2i$.

*Tomar cuidado quando o sinal dentro do radical for negativo.

Resolva as seguintes equações do 2º grau, utilizando uma das fórmulas.

(1) $2x^2+5x+4=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot4}}{4}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{-7}}{4}$$

$$x=\boldsymbol{\frac{-5\pm\sqrt{7}\,i}{4}}$$

(2) $4x^2-4x+5=0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{4}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{4}$$

$$=\frac{2\pm4i}{4}$$

$$x=\boldsymbol{\frac{1\pm2i}{2}}$$

Quando a solução da equação é um número imaginário, chamamos de raiz imaginária ou raiz complexa.

J 116b

(3) $3x^2-8x+7=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-21}}{3}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{-5}}{3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{4\pm\sqrt{5}\,i}{3}}$$

(4) $2x^2+8x+9=0$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-18}}{2}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{-2}}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{-4\pm\sqrt{2}\,i}{2}}$$

(5) $4x^2-12x+9=0$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{4}$$

$$=\frac{6\pm0}{4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(6) $3x^2-12=0$

$$x=\frac{0\pm\sqrt{0-4\cdot3\cdot(-12)}}{6}$$

$$=\frac{\pm\sqrt{144}}{6}$$

$$=\pm\frac{12}{6}$$

$$x=\boldsymbol{\pm2}$$

(7) $2x^2=5x$

$2x^2-5x=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot0}}{4}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{25}}{4}$$

$$=\frac{5\pm5}{4}$$

$$x=\boldsymbol{\frac{5}{2},\ 0}$$

(8) $-x^2+4x-5=0$

$x^2-4x+5=0$

$x=2\pm\sqrt{4-5}$

$=\ 2\pm\sqrt{-1}$

$x=\boldsymbol{2\pm i}$

J 117 a Números complexos e equações do 2º grau

(11 pontos)

Resolva as seguintes equações do 2º grau.

(1) $5x^2-6x+4=0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-20}}{5}$$

$$=\frac{\mathbf{3\pm\sqrt{11}\,i}}{\mathbf{5}}$$

(2) $9x^2+12x+4=0$

$$(3x+2)^2=0$$

$$x=\mathbf{-\frac{2}{3}}$$

(3) $2x^2+5x+5=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-40}}{4}$$

$$=\frac{\mathbf{-5\pm\sqrt{15}\,i}}{\mathbf{4}}$$

(4) $-x^2+3x-5=0$

$$x^2-3x+5=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-20}}{2}$$

$$=\frac{\mathbf{3\pm\sqrt{11}\,i}}{\mathbf{2}}$$

(5) $-3x^2+8x-7=0$

$$3x^2-8x+7=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-21}}{3}$$

$$=\frac{\mathbf{4\pm\sqrt{5}i}}{\mathbf{3}}$$

J 117b

(6) $2x(3-x)=4-3x$

$2x^2-9x+4=0$

$(x-4)(2x-1)=0$

$x=\mathbf{4},\ \mathbf{\frac{1}{2}}$

(7) $(x-5)(2x-1)=5$

$2x^2-11x+5=5$

$2x^2-11x=0$

$x(2x-11)=0$

$x=\mathbf{0},\ \mathbf{\frac{11}{2}}$

(8) $x^2-\sqrt{3}\,x-2=0$

$x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+8}}{2}$

$=\mathbf{\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{2}}$

(9) $x^2+\sqrt{5}\,x-10=0$

Pela fatoração:

$(x-\sqrt{5}\,)(x+2\sqrt{5}\,)=0$

$x=\mathbf{\sqrt{5},\ -2\sqrt{5}}$

Pela aplicação da Fórmula de Báskara:

$x=\frac{-\sqrt{5}\pm\sqrt{5+40}}{2}$

$=\frac{-\sqrt{5}\pm3\sqrt{5}}{2}$

$=\mathbf{-2\sqrt{5},\sqrt{5}}$

J 118a Números complexos e equações do 2º grau

(11 pontos)

Resolva as seguintes equações do 2º grau.

(1) $(x+1)^2=(x+2)^2+(x+3)^2$

$x^2+2x+1=2x^2+10x+13$

$x^2+8x+12=0$

$(x+6)(x+2)=0$

$x=\mathbf{-6,\ -2}$

(2) $\frac{1}{4}=(2+x)^2$

$1=4(2+x)^2$

$4x^2+16x+15=0$

$(2x+3)(2x+5)=0$

$x=\mathbf{-\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}}$

(3) $x^2=\frac{2}{3}(x+1)$

$3x^2=2(x+1)$

$3x^2-2x-2=0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{1+6}}{3}$

$=\mathbf{\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}}$

(4) $\frac{x(x+3)}{3}=\frac{5x-1}{4}$

$4x(x+3)=3(5x-1)$

$4x^2-3x+3=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9-48}}{8}$

$=\mathbf{\frac{3\pm\sqrt{39}\,i}{8}}$

J 118b

(5) $0,3x^2-2x+3,6=0$

$3x^2-20x+36=0$

$x=\dfrac{10\pm\sqrt{100-108}}{3}$

$=\dfrac{\boldsymbol{10\pm2\sqrt{2}\,i}}{3}$

(6) $0,2x^2-0,5x+0,4=0$

$2x^2-5x+4=0$

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-32}}{4}$

$=\dfrac{\boldsymbol{5\pm\sqrt{7}\,i}}{4}$

(7) $x^2-2mx+n^2=0$

$x=\boldsymbol{m\pm\sqrt{m^2-n^2}}$

(8) $x^2-4ax+3a^2=0$

$(x-3a)(x-a)=0$

$x=\boldsymbol{3a,\ a}$

(9) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

$[x-(a+b)][x-(a-b)]=0$

$x=\boldsymbol{a+b,\ a-b}$

$[x=\boldsymbol{a\pm b}]$

J 119a Números complexos e equações do 2º grau

(33 pontos)

1. Fatore as seguintes expressões no conjunto dos números complexos.

Exemplo

x^2-2x+3

[Res.] As raízes de $x^2-2x+3=0$ são:

$x=1\pm\sqrt{1-3}$

$=1\pm\sqrt{2}i$

$[x-(1+\sqrt{2}i)][x-(1-\sqrt{2}i)]=0$

Logo:

$x^2-2x+3=(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

(1) x^2-2x+5

[Res.] $x^2-2x+5=0$

$x=1\pm\sqrt{1-5}$

$=1\pm\sqrt{-4}$

$=1\pm2i$

$x=1+2i,\ 1-2i$

$[x-(1+2i)][x-(1-2i)]=0$

$(x-1-2i)(x-1+2i)=0$

$x^2-2x+5=$

$\boldsymbol{(x-1-2i)(x-1+2i)}$

(2) x^2+1

[Res.] $x^2+1=0$

$x=\dfrac{\pm\sqrt{-4}}{2}$

$=\dfrac{\pm2i}{2}$

$x=i,\ -i$

$(x-i)(x+i)=0$

$x^2+1=\boldsymbol{(x-i)(x+i)}$

Exemplo

Dada a equação do 2º grau $ax^2-2x+b=0$, se uma das raízes é $1+2i$, determine os valores de a e b, e o valor da outra raiz. Ver: J 109

Substituindo a raiz conhecida $x=1+2i$, na equação temos:

$$a(1+2i)^2-2(1+2i)+b=0$$
$$-3a+4ai-2-4i+b=0$$
$$-3a+b-2+(4a-4)i=0$$

Ordenando os termos que contém i e não contém i, temos:

$$\begin{cases} -3a+b-2=0 \cdots ① \\ 4a-4=0 \cdots ② \end{cases}$$

De ① e ②, $a=1$, $b=5$

temos, então: $x^2-2x+5=0$.

Substituindo esses valores em $ax^2-2x+b=0$.

$x=1\pm 2i$

A outra raiz é portanto: $x=1-2i$.

2. Dada a equação do 2º grau $x^2-ax+b=0$, se uma das raízes é $1+i$, determine os valores de a e b, e o valor da outra raiz.

[Res.] Substituindo a raiz conhecida $x=1+i$ na equação do 2º grau:

$$(1+i)^2-a(1+i)+b=0$$
$$2i-a-ai+b=0$$
$$(-a+b)+(2-a)i=0$$
$$\begin{cases} -a+b=0 \cdots ① \\ 2-a=0 \quad \cdots ② \end{cases}$$

De ① e ②, $\boldsymbol{a=2}$ e $\boldsymbol{b=2}$

Substituindo esses valores em $x^2-ax+b=0$, obtemos: $x^2-2x+2=0$

$x=1\pm i$

A outra raiz é portanto $\boldsymbol{x=1-i}$.

Quando a equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$ tem raiz $x=\alpha+\beta i$ então $x=\alpha-\beta i$ também é raiz.

J 120a Números complexos e equações do 2º grau

(8 pontos)

1. Resolva as seguintes equações do 2º grau.

(1) $-x^2+12x+8=0$

$x^2-12x-8=0$

$x=6\pm\sqrt{36+8}$

$=\mathbf{6\pm2\sqrt{11}}$

(2) $\frac{1}{9}=(2+x)^2$

$1=9(2+x)^2$

$9x^2+36x+35=0$

$(3x+7)(3x+5)=0$

$x=\mathbf{-\frac{7}{3},\ -\frac{5}{3}}$

(3) $0,5x^2+0,2x+0,1=0$

$5x^2+2x+1=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-5}}{5}$

$=\mathbf{\frac{-1\pm2i}{5}}$

(4) $x^2-2ax+2a^2=0 \quad (a>0)$

$x=a\pm\sqrt{a^2-2a^2}$

$=\boldsymbol{a\pm ai}$

(5) $x^2+2ax+(2a-1)=0$

$(x+1)[x+(2a-1)]=0$

$x=\mathbf{-1,\ -2a+1}$

J 120b

2. Efetue os seguintes cálculos:

(1) $\sqrt{-3}\sqrt{-5} = \sqrt{3}i\sqrt{5}i = \sqrt{15}i^2 = \mathbf{-\sqrt{15}}$

(2) $\sqrt{(-3)\times(-5)} = \mathbf{\sqrt{15}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}i} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot i}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot i} = \dfrac{\sqrt{15}i}{5i^2} = \dfrac{\sqrt{15}i}{-5} = \mathbf{-\dfrac{\sqrt{15}}{5}i}$

(4) $\sqrt{\dfrac{3}{-5}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}i = \mathbf{\dfrac{\sqrt{15}i}{5}}$

(5) $(3+2i)(5-6i) = 15-8i-12i^2 = \mathbf{27-8i}$

(6) $(3-\sqrt{-2})^2 = (3-\sqrt{2}i)^2 = 9-6\sqrt{2}i+2i^2 = \mathbf{7-6\sqrt{2}i}$

(7) $\dfrac{5-i}{2-3i} = \dfrac{(5-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{10+13i-3i^2}{4+9} = \dfrac{13+13i}{13} = \mathbf{1+i}$

J 121a Discriminante

(8 pontos)

Exemplo

Fórmula de Báskara:

Seja a equação do 2º grau: $ax^2+bx+c=0$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

1. Resolva as seguintes equações do 2º grau utilizando a Fórmula de Báskara.

(1) $x^2+8x+15=0$

$x=-4\pm\sqrt{16-15}$

$=-4\pm1$

$x=\mathbf{-5,\ -3}$

(2) $x^2+8x+16=0$

$x=-4\pm\sqrt{16-16}$

$=\mathbf{-4}$

(3) $x^2+8x+17=0$

$x=-4\pm\sqrt{16-17}$

$=\mathbf{-4\pm i}$

(4) $x^2-4x+4=0$

$x=2\pm\sqrt{4-4}$

$=\mathbf{2}$

(5) $x^2-4x+5=0$

$x=2\pm\sqrt{4-5}$

$=\mathbf{2\pm i}$

(6) $x^2-4x+2=0$

$x=2\pm\sqrt{4-2}$

$x=\mathbf{2\pm\sqrt{2}}$

Dos resultados acima, podemos observar que existem três tipos de soluções:

- As que têm duas raízes reais e distintas são (1) e **(6)**.
- As que têm duas raízes reais e iguais são (2) e **(4)**.
- As que têm duas raízes complexas são (3) e **(5)**.

J 121b

2. Resolva as seguintes equações do 2º grau utilizando a Fórmula de Báskara. Escreva no [ ], raízes reais e distintas, raízes reais e iguais ou raízes complexas.

(1) $x^2-5x+5=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-20}}{2}$$

$$=\frac{\mathbf{5\pm\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$$

$x^2-5x+5=0$ tem,

duas [raízes reais e distintas]

Neste caso:

$b^2-4ac=5^2-4\cdot1\cdot5=5>0$

(2) $x^2-10x+25=0$

$$x=5\pm\sqrt{25-25}$$

$$=\mathbf{5}$$

$x^2-10x+25=0$ tem,

duas [raízes reais e iguais]

Neste caso:

$b^2-4ac=$ [**0**]

(3) $x^2-5x+7=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-28}}{2}$$

$$=\frac{\mathbf{5\pm\sqrt{3}\,i}}{\mathbf{2}}$$

$x^2-5x+7=0$ tem,

duas [raízes complexas]

Neste caso:

$b^2-4ac=$ [-3] <0

Pelos resultados acima, conclui-se que as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ dependem do sinal de * $\boldsymbol{D=b^2-4ac}$.

(i) $D>0$ ⇔ duas raízes reais e distintas ……(1)

(ii) $D=0$ ⇔ duas raízes reais e iguais ……(2)

(iii) $D<0$ ⇔ duas raízes complexas ……(3)

* $D=b^2-4ac$ é chamado de discriminante.

J 122a Discriminante

(10 pontos)

Análise do discriminante da equação do 2º grau

Considerando o discriminante $D = b^2 - 4ac$.

Quando $D > 0$, $\Leftrightarrow$ há duas raízes reais e distintas.

Quando $D = 0$, $\Leftrightarrow$ há duas raízes reais e iguais.

Quando $D < 0$, $\Leftrightarrow$ há duas raízes complexas.

1. Discrimine as raízes das seguintes equações do 2º grau.

Exemplo

$x^2 + 5x + 3 = 0$

[Res.]

$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13 > 0$

$D > 0$

Portanto, há duas raízes reais e distintas.

(1) $x^2 + 5x - 1 = 0$

$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)$

$= 29 > 0$

Portanto, há duas raízes reais e distintas.

(2) $3x^2 + 3x + 1 = 0$

$D = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1$

$= -3 < 0$

Portanto, há duas raízes complexas.

(3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9$

$= 0$

Portanto, há duas raízes reais e iguais.

(4) $3x^2 + 7x + 4 = 0$

$D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4$

$= 1 > 0$

Portanto, há duas raízes reais e distintas.

J 122b

(5) $2x^2+6x+5=0$

$D=6^2-4\cdot2\cdot5$

$=-4<0$

Portanto, há duas raízes complexas.

(6) $5x^2-10x+5=0$

$D=(-10)^2-4\cdot5\cdot5$

$=0$

Portanto, há duas raízes reais e iguais.

(7) $(x+3)^2+7=0$

$x^2+6x+16=0$

$D=6^2-4\cdot1\cdot16$

$=-28<0$

Portanto, há duas raízes complexas.

(8) $2x^2+\sqrt{3}x+3=0$

$D=(\sqrt{3})^2-4\cdot2\cdot3$

$=-21<0$

Portanto, há duas raízes complexas.

(9) $x^2+2\sqrt{2}x+2=0$

$D=(2\sqrt{2})^2-4\cdot1\cdot2$

$=0$

Portanto, há duas raízes reais e iguais.

(10) $\sqrt{2}x^2-3x+2\sqrt{2}=0$

$D=(-3)^2-4\cdot\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}$

$=-7<0$

Portanto, há duas raízes complexas.

J 123a Discriminante

(10 pontos)

Em $ax^2+2b'x+c=0$ (coeficiente de x é par).

Pode-se discriminar usando a fórmula: $\frac{D}{4}=b'^2-ac$

Discrimine as raízes das seguintes equações do 2º grau:

Exemplo

$x^2+4x+5=0 \quad \leftarrow \quad x^2+\mathbf{2}\cdot 2x+5=0$

[Res.]

$=2^2-1\times 5$

$\frac{D}{4}=-1<0$

Portanto, há duas raízes complexas.

(1) $25x^2+10x+1=0$

$\frac{D}{4}=5^2-25\times 1=0$

Portanto, há duas raízes reais e iguais.

(2) $2x^2+6x+3=0$

$\frac{D}{4}=3^2-2\times 3=3>0$

Portanto, há duas raízes reais e distintas.

(3) $25x^2-30x+9=0$

$\frac{D}{4}=(-15)^2-25\times 9=0$

Portanto, há duas raízes reais e iguais.

(4) $x^2-5x+3=0$

$D=(-5)^2-4\times 1\times 3=13>0$

Portanto, há duas raízes reais e distintas.

(5) $2x^2-4x+3=0$

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times 3=-2<0$

Portanto, há duas raízes complexas.

(6) $x^2-3x-2=0$

$D=(-3)^2-4\times 1\times(-2)$

$=17>0$

Portanto, há duas raízes reais e distintas.

(7) $3x^2-7x+6=0$

$D=(-7)^2-4\times 3\times 6$

$=-23<0$

Portanto, há duas raízes complexas.

(8) $3x^2-12x+13=0$

$\frac{D}{4}=(-6)^2-3\times 13=$

$=-3<0$

Portanto, há duas raízes complexas.

(9) $x^2+2\sqrt{3}\,x+3=0$

$\frac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\times 3=0$

Portanto, há duas raízes reais e iguais.

(10) $2x^2-2\sqrt{3}x+3=0$

$\frac{D}{4}=(-\sqrt{3})^2-2\times 3$

$=-3<0$

Portanto, há duas raízes complexas.

J 124a Discriminante

(12 pontos)

Determine o valor de k para que cada equação do 2º grau tenha duas raízes reais e iguais.

Quando: $ax^2+bx+c=0$,
o discriminante é $D=b^2-4ac$.

Quando: $ax^2+2b'x+c=0$,
o discriminante é $\frac{D}{4}=b'^2-ac$.

Exemplo

$2x^2-5x+k=0$

[Res.] $D=25-8k=0$

Portanto, $k=\frac{25}{8}$

Para que tenha duas raízes reais e iguais basta que $D=0$.

(1) $3x^2-5x+k=0$

$D=25-12k=0$

$\boldsymbol{k=\frac{25}{12}}$

(2) $3x^2-8x+k=0$

$\frac{D}{4}=16-3k=0$

$\boldsymbol{k=\frac{16}{3}}$

(3) $2x^2+kx+k-2=0$

$D=k^2-8(k-2)=0$

$D=k^2-8k+16=0$

$(k-4)^2=0$

$\boldsymbol{k=4}$

(4) $3x^2+2kx+(2k-3)=0$

$\frac{D}{4}=k^2-3(2k-3)=0$

$\frac{D}{4}=k^2-6k+9=0$

$(k-3)^2=0$

$\boldsymbol{k=3}$

J 124b

(5) $x^2+2(k+1)x+2(1+k^2)=0$

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-1.2(1+k^2)=0$

$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

$\boldsymbol{k=1}$

(6) $3x^2+4kx+4k=0$

$\frac{D}{4}=4k^2-12k=0$

$\boldsymbol{k=0,\ 3}$

(7) $kx^2-x-(k-2)=0$

$D=1+4k(k-2)=0$

$4k^2-8k+1=0$

$\boldsymbol{k=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}}$

(8) $kx^2+(k+1)x-(k+2)=0$

$D=(k+1)^2+4k(k+2)=0$

$5k^2+10k+1=0$

$\boldsymbol{k=\frac{-5\pm2\sqrt{5}}{5}}$

J 125a Discriminante

(12 pontos)

Determine o intervalo de a para que cada equação do 2º grau tenha raízes reais ($D \geq 0$).

Exemplo

$x^2 - 3x + 2a = 0$

[Res.] $D = 9 - 8a \geq 0$

Portanto, $a \leq \frac{9}{8}$

Quando a equação do 2º grau possui duas raízes reais e distintas, $D > 0$. Quando a equação do 2º grau possui duas raízes reais e iguais, $D = 0$. Então para a equação ter raízes reais, o discriminante deve ser maior ou igual a zero, $D \geq 0$.

(1) $x^2 - 4x + 3a = 0$

$\frac{D}{4} = 4 - 3a \geq 0$

$\boldsymbol{a \leq \frac{4}{3}}$

(2) $3x^2 - 7x + 2a - 1 = 0$

$D = 49 - 12(2a - 1)$

$= -24a + 61 \geq 0$

$\boldsymbol{a \leq \frac{61}{24}}$

(3) $2x^2 - 4x + a + 2 = 0$

$\frac{D}{4} = 4 - 2(a + 2)$

$= -2a \geq 0$

$\boldsymbol{a \leq 0}$

(4) $3x^2 - 3x + 1 - a = 0$

$D = 9 - 12(1 - a)$

$= 12a - 3 \geq 0$

$\boldsymbol{a \geq \frac{1}{4}}$

J 125b

(5) $4x^2-4(a-3)x+a^2=0$

$\frac{D}{4}=[-2(a-3)]^2-4a^2$

$\frac{D}{4}=4(a-3)^2-4a^2$

$=-24a+36\geq 0$

$\boldsymbol{a\leq\frac{3}{2}}$

(6) $x^2-(2a-1)x+1+a^2=0$

$D=[-(2a-1)]^2-4.1.(1+a^2)$

$D=(2a-1)^2-4(1+a^2)$

$=-4a-3\geq 0$

$\boldsymbol{a\leq-\frac{3}{4}}$

(7) $x^2-2ax+(a+1)^2=0$

$\frac{D}{4}=(-a)^2-1.(a+1)^2$

$\frac{D}{4}=a^2-(a+1)^2$

$=-2a-1\geq 0$

$\boldsymbol{a\leq-\frac{1}{2}}$

(8)* $(a+1)x^2-2(a+1)x+(a-1)=0$

$(a\neq -1)$

$\frac{D}{4}=[-(a+1)]^2-(a+1)(a-1)$

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a+1)(a-1)$

$=2a+2\geq 0$

$a\geq -1$

Como $a\neq -1$, a resposta é:

$\boldsymbol{a>-1}$

KUMON J 126a

Discriminante

(12 pontos)

Determine o intervalo de k para que cada equação do 2º grau tenha duas raízes complexas($D<0$).

Exemplo

$x^2-3x+3k=0$

[Res.] $D=9-12k<0$

Portanto, $k>\frac{3}{4}$

Para que a equação tenha duas raízes complexas basta que $D<0$.

(1) $x^2-2x+3k=0$

$\frac{D}{4}=1-3k<0$

$k>\frac{1}{3}$

(2) $2x^2-3x+k-1=0$

$D=9-8(k-1)<0$

$k>\frac{17}{8}$

(3) $2x^2-4x+k+1=0$

$\frac{D}{4}=4-2(k+1)<0$

$k>1$

(4) $3x^2-5x+2-k=0$

$D=25-12(2-k)<0$

$k<-\frac{1}{12}$

J 126b

(5) $x^2-2(k-1)x+k^2=0$

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k^2<0$

$\boldsymbol{k>\frac{1}{2}}$

(6) $x^2-(2k+1)x-1+k^2=0$

$D=(2k+1)^2-4(-1+k^2)<0$

$\boldsymbol{k<-\frac{5}{4}}$

(7) $x^2-4kx+(2k+1)^2=0$

$\frac{D}{4}=4k^2-(2k+1)^2<0$

$\boldsymbol{k>-\frac{1}{4}}$

(8) $kx^2-2(k+1)x+(k-1)=0$

$(k\neq 0)$

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-k(k-1)<0$

$\boldsymbol{k<-\frac{1}{3}}$

J 127a Discriminante

(25 pontos)

Discrimine as raízes das seguintes equações do 2º grau (k, a, m representam números reais).

Exemplo

$x^2-5x+k=0$

[Res.] $D=25-4k$

Temos portanto:

R.:
- Quando $k<\frac{25}{4}$, duas raízes reais e distintas. ☜ Pois: $D=25-4k>0$.
- Quando $k=\frac{25}{4}$, duas raízes reais e iguais. ☜ Pois: $D=25-4k=0$.
- Quando $k>\frac{25}{4}$, duas raízes complexas. ☜ Pois: $D=25-4k<0$.

(1) $x^2-3x+k=0$

[Res.] $D=9-4k$

$D>0$	$9-4k>0$	$k<\frac{9}{4}$
$D=0$	$9-4k=0$	$k=\frac{9}{4}$
$D<0$	$9-4k<0$	$k>\frac{9}{4}$

R.:
- $k<\frac{9}{4}$, duas raízes reais e distintas.
- $k=\frac{9}{4}$, duas raízes reais e iguais.
- $k>\frac{9}{4}$, duas raízes complexas.

J 127b

(2) $x^2+2x+3a=0$

[Res.] $\frac{D}{4}=1-3a$

$D>0 \quad 1-3a>0 \quad a<\frac{1}{3}$

$D=0 \quad 1-3a=0 \quad a=\frac{1}{3}$

$D<0 \quad 1-3a<0 \quad a>\frac{1}{3}$

R.: $\begin{cases} a<\frac{1}{3}, \text{ duas raízes reais e distintas.} \\ a=\frac{1}{3}, \text{ duas raízes reais e iguais.} \\ a>\frac{1}{3}, \text{ duas raízes complexas.} \end{cases}$

(3) $2x^2-3x-k=0$

[Res.] $D=9+8k$

$D>0 \quad 9+8k>0 \quad k>-\frac{9}{8}$

$D=0 \quad 9+8k=0 \quad k=-\frac{9}{8}$

$D<0 \quad 9+8k<0 \quad k<-\frac{9}{8}$

R: $\begin{cases} k>-\frac{9}{8}, \text{ duas raízes reais e distintas.} \\ k=-\frac{9}{8}, \text{ duas raízes reais e iguais.} \\ k<-\frac{9}{8}, \text{ duas raízes complexas.} \end{cases}$

(4) $2x^2-4x-3m=0$

[Res.] $\frac{D}{4}=4+6m$

$D>0 \quad 4+6m>0 \quad m>-\frac{2}{3}$

$D=0 \quad 4+6m=0 \quad m=-\frac{2}{3}$

$D<0 \quad 4+6m<0 \quad m<-\frac{2}{3}$

R.: $\begin{cases} m>-\frac{2}{3}, \text{ duas raízes reais e distintas.} \\ m=-\frac{2}{3}, \text{ duas raízes reais e iguais.} \\ m<-\frac{2}{3}, \text{ duas raízes complexas.} \end{cases}$

J 128a Discriminante

(16 pontos)

Discrimine as raízes das seguintes equações do 2º grau (a é um número real).

$2x^2+x-2a^2=0$

[Res.] $D=1+16a^2$

De: $a^2 \geq 0$

$D=1+16a^2>0$ ← Qualquer que seja o valor de a, a^2 será sempre positivo ou zero, por isso $1+16a^2 \geq 1>0$.

Portanto, há duas raízes reais e distintas.

(1) $ax^2-3x-2a=0$

[Res.] $D=9+8a^2$

$a^2 \geq 0$

$D=9+8a^2>0$

Portanto, há duas raízes reais e distintas.

(2) $(a+5)x^2-3ax+(a-5)=0$

[Res.] $D=9a^2-4(a+5)(a-5)=5a^2+100$

$a^2 \geq 0$

$D=5a^2+100>0$

Portanto, há duas raízes reais e distintas.

(3)* $x^2-2ax+2a^2+1=0$

[Res.] $\frac{D}{4}=a^2-2a^2-1=-(a^2+1)$

$a^2 \geq 0$

$D=-(a^2+1)<0$

Portanto, há duas raízes complexas.

Exemplo

$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$

[Res.] $D = 9a^2 - 8a^2 = a^2$

Portanto,

Quando: $a = 0$, duas raízes reais e iguais. ☜ De: $D = 0$

Quando: $a \neq 0$, duas raízes reais e distintas. ☜ De: $D > 0$

(4) $x^2 - 4ax + 3a^2 = 0$

[Res.] $\frac{D}{4} = 4a^2 - 3a^2 = a^2$

Quando $\boldsymbol{a = 0}$, há duas raízes reais e iguais. (Desde que $D = 0$)

Quando $\boldsymbol{a \neq 0}$, há duas raízes reais e distintas. (Desde que $D > 0$)

(5) $x^2 - ax + a^2 = 0$

[Res.] $D = a^2 - 4a^2 = -3a^2$

Quando $\boldsymbol{a = 0}$, há duas raízes reais e iguais. (Desde que $D = 0$)

Quando $\boldsymbol{a \neq 0}$, há duas raízes reais e complexas. (Desde que $D < 0$)

(6) $x^2 - 2ax + a^2 = 0$

[Res.] $\frac{D}{4} = a^2 - a^2 = 0$ (Desde que $D = 0$)

Para qualquer valor de $\boldsymbol{a}$, temos duas raízes reais e iguais.

J 129a Discriminante

(50 pontos)

Exemplo

Para que a equação do 2º grau $x^2+(m+1)x+(2m-1)=0$ tenha duas raízes reais e iguais:

(1) Determine o valor de m :

[Res.] $D=(m+1)^2-4(2m-1)$

$=m^2-6m+5$

$=(m-5)(m-1)=0$

Portanto: $m=5,\ 1$

(2) Determine as suas raízes:

[Res.] Quando $m=5$,

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{m+1}{2}=-3$$

Quando $m=1$,

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{m+1}{2}=-1$$

☜ Para duas raízes reais e iguais, $D=0$, então quando

$D=b^2-4ac=0$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}.$$

1. Determine o valor de m para que a equação do 2º grau $3x^2+4mx+m=0$ tenha duas raízes reais e iguais. Determine também as raízes.

[Res.] $\dfrac{D}{4}=4m^2-3m=m(4m-3)=0$

$$\boldsymbol{m=0,\ \frac{3}{4}}$$

Quando $m=0$, $\boldsymbol{x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4m}{2\cdot3}=0}$

Quando $m=\dfrac{3}{4}$, $\boldsymbol{x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{4m}{2\cdot3}=-\dfrac{1}{2}}$

J 129b

*

2. Determine o valor de k para que a equação do 2º grau $x^2+(2k-3)x+2k=0$, tenha duas raízes reais e iguais negativas.

[Res.]

$$D=(2k-3)^2-4(2k)=4k^2-20k+9=0$$

$$k=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{4}=\frac{9}{2},\ \frac{1}{2}$$

Quando $k=\frac{9}{2}$, $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2k-3}{2}=-3$

Quando $k=\frac{1}{2}$, $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2k-3}{2}=1$ $\Leftarrow$ Note que esta solução é positiva e, portanto não pode ser a resposta do exercício.

Resp.: A solução negativa é $\boldsymbol{x=-3}$.

J 130a Discriminante

(33 pontos)

1.Discrimine as raízes das seguintes equações do 2º grau.

(1) $x^2+5x+3+a=0$

[Res.] $D=25-4(3+a)$

$=13-4a$

Quando $\begin{cases} a<\dfrac{13}{4}, & \text{há duas raízes reais e distintas.} \\ a=\dfrac{13}{4}, & \text{há duas raízes reais e iguais.} \\ a>\dfrac{13}{4}, & \text{há duas raízes complexas.} \end{cases}$

(2) $x^2+(a+b)x+ab=0$

[Res.] $D=(a+b)^2-4ab$

$=a^2-2ab+b^2$

$=(a-b)^2$

Quando $\begin{cases} a=b, & \text{há duas raízes reais e iguais.} \\ a\neq b, & \text{há duas raízes reais e distintas.} \end{cases}$

J 130b

2. Prove que se a equação do 2º grau $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ apresenta duas raízes reais e iguais, então $b=\dfrac{a+c}{2}$.

Dica: Podemos reorganizar a equação $b=\dfrac{a+c}{2}$ para $a+c-2b=0$.

[Res.] $D=(c-a)^2-4(b-c)(a-b)$

$=(c^2-2ac+a^2)-4(ab-b^2-ac+bc)$

$=c^2-2ac+a^2-4ab+4b^2+4ac-4bc$

$=a^2+2(c-2b)a+(c-2b)^2$

$=(a+c-2b)^2$

Para que a equação do 2° grau tenha duas raízes reais e iguais, $D=0$.

$D=(a+c-2b)^2=0$

e $a+c-2b=0$

Então,

$$\boldsymbol{b=\frac{a+c}{2}}$$

J 131a Relação entre raízes e coeficientes

(14 pontos)

1. Determine as raízes e calcule a soma e o produto delas nas seguintes equações do 2º grau, observando o exemplo.

Exemplo

$x^2-4x+3=0$

[Res.] $(x-1)(x-3)=0$

$x=1,3$

$\alpha+\beta=1+3=4$ ☜ Calcula-se considerando as α, β as raízes.

$\alpha\beta=1\times3=3$

(1) $x^2-2x-8=0$

$(x-4)(x+2)=0$

$x=4,\ -2$

$\alpha+\beta=\mathbf{2}$

$\alpha\beta=\mathbf{-8}$

(2) $x^2-7x+5=0$

$x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-20}}{2}$

$=\dfrac{7\pm\sqrt{29}}{2}$

$\alpha+\beta=\mathbf{7}$

$\alpha\beta=\mathbf{5}$

(3) $3x^2+2x+5=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-15}}{3}$

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{14}\,i}{3}$

$\alpha+\beta=\mathbf{-\dfrac{2}{3}}$

$\alpha\beta=\mathbf{\dfrac{5}{3}}$

(4) $ax^2+bx+c=0\quad(a\neq0)$

$\alpha+\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\mathbf{-\dfrac{b}{a}}$

$\alpha\beta=\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

$=\mathbf{\dfrac{c}{a}}$

J 131b

Do resultado de 131a (4) forma-se a seguinte relação entre raízes e coeficientes na equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$.

Relações entre raízes e coeficientes

Considerando α, β as duas raízes de $ax^2+bx+c=0$. $(a\neq 0)$

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

2. Determine utilizando as relações entre raízes e coeficientes, a soma e o produto das raízes α, β das seguintes equações do 2º grau.

Exemplo

$x^2-3x+9=0$

$$\alpha+\beta=-\frac{(-3)}{1}=3$$

$$\alpha\beta=\frac{9}{1}=9$$

(1) $3x^2-7x+6=0$

$$\alpha+\beta=\frac{7}{3}$$

$$\alpha\beta=2$$

(2) $3x^2+6x+7=0$

$$\alpha+\beta=-2$$

$$\alpha\beta=\frac{7}{3}$$

(3) $7x^2-6x+1=0$

$$\alpha+\beta=\frac{6}{7}$$

$$\alpha\beta=\frac{1}{7}$$

J 132a Relação entre raízes e coeficientes

(10 pontos)

Relações entre raízes e coeficientes

Considerando α, β as raízes de $ax^2+bx+c=0$. $(a\neq 0)$

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

1. Determine a soma e o produto das raízes, α, β, das seguintes equações do 2º grau.

(1) $3x^2+7x-6=0$

$\alpha+\beta=-\dfrac{7}{3}$

$\alpha\beta=-2$

(2) $x^2+3=0$

$\alpha+\beta=0$

$\alpha\beta=3$

(3) $5x^2-3x=0$

$\alpha+\beta=\dfrac{3}{5}$

$\alpha\beta=0$

(4) $x^2+ax+b=0$

$\alpha+\beta=-a$

$\alpha\beta=b$

(5) $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

(6) $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0$

$\alpha+\beta=\dfrac{5}{6}$

$\alpha\beta=\dfrac{1}{6}$

J 132b

2. Construa, utilizando as relações entre raízes e coeficientes, uma equação do 2º grau que tenha como raízes os seguintes números .

Exemplo

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

[Res.] Considerando α, β as raízes acima.

$\alpha+\beta=\frac{5}{6} \quad \alpha\beta=\frac{1}{6}$

Veja o exercício (6) da face a.

Logo,

$x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$

Colocar o sinal negativo no coeficiente de x.

$6x^2-5x+1=0$

Multiplicar ambos os membros por 6, para eliminar o denominador.

(1) $-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}$

$\alpha+\beta=\frac{5}{12}$

$\alpha\beta=-\frac{1}{6}$

$x^2-\frac{5}{12}x-\frac{1}{6}=0$

$\mathbf{12x^2-5x-2=0}$

(2) $2, -\frac{2}{3}$

$\alpha+\beta=\frac{4}{3}$

$\alpha\beta=-\frac{4}{3}$

$x^2-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}=0$

$\mathbf{3x^2-4x-4=0}$

(3) $3, -5$

$\alpha+\beta=-2$

$\alpha\beta=-15$

$\mathbf{x^2+2x-15=0}$

(4) $-3, -8$

$\alpha+\beta=-11$

$\alpha\beta=24$

$\mathbf{x^2+11x+24=0}$

J 133a Relação entre raízes e coeficientes

(11 pontos)

1. Construa, utilizando as relações entre raízes e coeficientes, uma equação do 2º grau que tenha como raízes os seguintes números .

Exemplo

$1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$

Considerando α, β as raízes acima:

$\alpha+\beta=2$

$\alpha\beta=-1$

Portanto,

$x^2-2x-1=0$

(1) $3+\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$

$\alpha+\beta=6$

$\alpha\beta=4$

$\boldsymbol{x^2-6x+4=0}$

(2) $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$

$\alpha+\beta=0$

$\alpha\beta=-3$

$\boldsymbol{x^2-3=0}$

(3) $2+\sqrt{3}\,i$, $2-\sqrt{3}\,i$

$\alpha+\beta=4$

$\alpha\beta=7$

$\boldsymbol{x^2-4x+7=0}$

(4) $2+3i$, $2-3i$

$\alpha+\beta=4$

$\alpha\beta=13$

$\boldsymbol{x^2-4x+13=0}$

(5) $1+i$, $1-i$

$\alpha+\beta=2$

$\alpha\beta=2$

$\boldsymbol{x^2-2x+2=0}$

(6) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\alpha+\beta=1$

$\alpha\beta=-1$

$\boldsymbol{x^2-x-1=0}$

(7) a, b

$\alpha+\beta=a+b$

$\alpha\beta=ab$

$\boldsymbol{x^2-(a+b)x+ab=0}$

(8) $a+bi, a-bi$

$\alpha+\beta=2a$

$\alpha\beta=a^2+b^2$

$\boldsymbol{x^2-2ax+a^2+b^2=0}$

(9) $3a+2\sqrt{5}b, 3a-2\sqrt{5}b$

$\alpha+\beta=6a$

$\alpha\beta=9a^2-20b^2$

$\boldsymbol{x^2-6ax+9a^2-20b^2=0}$

As equações do 2º grau cujas raízes são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, poderiam ser escritas como $\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$.

(Desenvolvendo este produto e somando os termos semelhantes, encontraremos a equação do 2º grau $x^2-x-1=0$). No entanto, os cálculos seriam bem trabalhosos.

J 134a Relação entre raízes e coeficientes

(16 pontos)

1. Determine o valor das seguintes expressões quando as raízes da equação do 2º grau $x^2-4x+5=0$ forem α e β $(\alpha>\beta)$.

Exemplo

$\alpha^2+\beta^2$

[Res.] $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=5$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\times5=6$

(1) $(\alpha-\beta)^2$

[Res.] $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$

$=6-2\times5$

$=\mathbf{-4}$

(2) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

[Res.] $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=5\cdot4$

$=\mathbf{20}$

(3) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$

[Res.] $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$

$=6+5$

$=\mathbf{11}$

J 134b

2. Determine o valor das seguintes expressões quando as raízes da equação do 2º grau $3x^2+3x-1=0$ forem α e β.

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

[Res.] $\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{3}$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}(\alpha+\beta)=(-3)\times(-1)=\mathbf{3}$$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

[Res.] $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha\beta}(\alpha^2+\beta^2)=\dfrac{1}{\alpha\beta}[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]$

$$=-3\left[(-1)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=\mathbf{-5}$$

(3) $\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}$

[Res.] $\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}=\dfrac{(\beta+1)+(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)+2}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$$

$$=\frac{-1+2}{-\frac{1}{3}+(-1)+1}$$

$$=\mathbf{-3}$$

J 135a Relação entre raízes e coeficientes

(16 pontos)

1. Determine o valor das seguintes expressões quando as raízes da equação do 2º grau $3x^2+3x-1=0$ forem α e β.

(1) $\alpha^2+\beta^2$

[Res.] $\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-\frac{1}{3}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-1)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\mathbf{\frac{5}{3}}$

(2) $\alpha^3+\beta^3$

[Res.] $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ Dica

$=(-1)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-1)=\mathbf{-2}$

(3) $\alpha^4+\beta^4$

[Res.] $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$ Dica

$=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2$

$=\left(\frac{5}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\mathbf{\frac{23}{9}}$

Dica

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(3) $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

J 135b

2. Determine o valor das seguintes expressões quando as raízes da equação do 2º grau $x^2+5x-1=0$ forem α e β.

(1) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

[Res.] $\alpha+\beta=-5,\ \alpha\beta=-1$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}(\alpha^2+\beta^2)$$
$$=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]$$
$$=1[25-2\cdot(-1)]$$
$$=\mathbf{27}$$

(2) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$

[Res.] $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{1}{\alpha^3\beta^3}(\alpha^3+\beta^3)$
$$=\frac{1}{\alpha^3\beta^3}[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)]$$
$$=(-1)[-125-3\cdot(-1)(-5)]$$
$$=\mathbf{140}$$

(3) $\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^4}$

[Res.] $\frac{1}{\alpha^4}+\frac{1}{\beta^4}=\frac{1}{\alpha^4\beta^4}(\alpha^4+\beta^4)$
$$=\frac{1}{\alpha^4\beta^4}[(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2]$$
$$=1[27^2-2\cdot(-1)^2]$$
$$=\mathbf{727}$$

J 136a Relação entre raízes e coeficientes

(50 pontos)

Exemplo

Construa a equação do 2º grau cujas raízes sejam α^2, β^2, quando α e β, são as raízes da equação do 2º grau $x^2-4x+7=0$ (com a condição de que o coeficiente de x^2 seja 1).

[Res.] $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=4\\ \alpha\beta=7\end{array}\right\}$ ☜ Das relações entre raízes e coeficientes.

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=16-2\cdot 7=2 \quad \cdots ①$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=49 \quad \cdots ②$

☜ Considerar α^2 e β^2 como duas raízes. Pensar nas relações entre raízes e coeficientes.

De ① e ② temos:

$x^2-2x+49=0$

1. Construa a equação do 2º grau cujas raízes sejam $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, quando α, β são as raízes da equação do 2º grau $x^2-4x+7=0$ (com a condição de que o coeficiente de x^2 seja 1).

[Res.] $\alpha+\beta=4$

$\alpha\beta=7$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}(\alpha+\beta)$

$=\frac{1}{7}\cdot 4=\frac{4}{7} \quad \cdots ①$

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{7} \quad \cdots ②$

De ① e ② temos:

$$x^2-\frac{4}{7}x+\frac{1}{7}=0$$

J 136b

2. Construa a equação do 2º grau cujas raízes sejam $\frac{1}{\alpha+1}$, $\frac{1}{\beta+1}$,quando α e β são as raízes da equação do 2º grau $x^2-x+1=0$ (com a condição de que o coeficiente de x^2 seja 1).

[Res.] $\alpha+\beta=1$

$$\alpha\beta=1$$

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{(\beta+1)+(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)+2}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$$

$$=1 \quad \cdots ①$$

$$\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\left(\frac{1}{\beta+1}\right)=\frac{1}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$$

$$=\frac{1}{3} \quad \cdots ②$$

De ① e ② temos:

$$\boldsymbol{x^2-x+\frac{1}{3}=0}$$

J 137a Relação entre raízes e coeficientes

(50 pontos)

1. Escreva a equação do 2º grau cujas raízes excedem em uma unidade as raízes da equação do 2º grau $x^2-3x+1=0$.

[Res.] Sejam α e β as raízes de $x^2-3x+1=0$, então:

Dica

$$\alpha+\beta=3$$
$$\alpha\beta=1$$

Usamos estes resultados para encontrar a soma e o produto da nova equação do 2º grau,

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+2=5 \quad \cdots ①$$
$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=5 \quad \cdots ②$$

De ① e ② temos:

$$\boldsymbol{x^2-5x+5=0}$$

Dica

Considerando α, β as raízes de $x^2-3x+1=0$, as raízes da equação procurada serão $\alpha+1$, $\beta+1$.

2. Determine os valores de a e b, de modo que a equação do 2º grau $x^2+ax+b=0$ tenha raízes duas unidades a menos do que as raízes da equação do 2º grau $x^2-2x-5=0$.

[Res.] Sejam α e β as raízes de $x^2-2x-5=0$, então:

$$\alpha+\beta=2$$
$$\alpha\beta=-5$$

Usamos estes resultados para encontrar a soma e o produto da nova equação do 2° grau,

$$(\alpha-2)+(\beta-2)=(\alpha+\beta)-4=-2 \quad \cdots ①$$
$$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=-5 \quad \cdots ②$$

De ① e ② temos:

$$x^2+2x-5=0$$

Desde que a equação do 2° grau é $x^2+ax+b=0$,

$$\boldsymbol{a=2 \quad b=-5}$$

Dica

Considerando α, β as raízes de $x^2-2x-5=0$, as raízes da equação procurada serão $\alpha-2$, $\beta-2$.

J 138a Relação entre raízes e coeficientes

(33 pontos)

Exemplo

Determine os valores α e k quando as raízes do 2º grau $x^2-6x+k=0$ forem α e α^2.

[Res.] $\begin{cases} \alpha+\alpha^2=6 & \cdots ① \\ \alpha\cdot\alpha^2=\alpha^3=k & \cdots ② \end{cases}$

Das relações entre raízes e coeficientes.

De ①,

$\alpha^2+\alpha-6=0$

$(\alpha+3)(\alpha-2)=0$

Portanto, $\alpha=-3,\ 2$

Substituindo estes valores em ②,

Quando $\alpha=-3$, $k=-27$

Quando $\alpha=2$, $k=8$

1. Determine os valores de α e k quando as raízes da equação do 2º grau $x^2-12x+k=0$ forem α e α^2.

[Res.] $\begin{cases} \alpha+\alpha^2=12 & \cdots ① \\ \alpha\cdot\alpha^2=\alpha^3=k & \cdots ② \end{cases}$

De ①,

$\alpha^2+\alpha-12=0$

$(\alpha+4)(\alpha-3)=0$

$\boldsymbol{\alpha=-4,\ 3}$

Substituindo estes valores em ②,

Quando $\alpha=-4$, $\boldsymbol{k=-64}$

Quando $\alpha=3$, $\boldsymbol{k=27}$

J 138b

2. Determine os valores de α e k quando as raízes da equação do 2º grau $x^2-12x+k=0$ forem α e 2α.

[Res.] $\begin{cases} \alpha+2\alpha=12 & \cdots ① \\ \alpha\cdot 2\alpha=2\alpha^2=k & \cdots ② \end{cases}$

De ①,

$3\alpha=12$

$\boldsymbol{\alpha=4}$

Substituindo este valor em ②,

$\boldsymbol{k=32}$

3. Determine os valores de α e k quando as raízes da equação do 2º grau $x^2+kx+12=0$ forem α e 2α.

[Res.] $\begin{cases} \alpha+2\alpha=-k & \cdots ① \\ \alpha\cdot 2\alpha=2\alpha^2=12 & \cdots ② \end{cases}$

De ②,

$2\alpha^2=12$

$\boldsymbol{\alpha=\pm\sqrt{6}}$

Substituindo estes valores em ①,

Quando $\alpha=\sqrt{6}$, $\boldsymbol{k=-3\sqrt{6}}$

Quando $\alpha=-\sqrt{6}$, $\boldsymbol{k=3\sqrt{6}}$

J 139a Relação entre raízes e coeficientes

(50 pontos)

Exemplo

Determine o intervalo de k para que a equação do 2º grau $x^2-6x+3k=0$ tenha duas raízes reais, distintas e positivas.

[Res.] Consideremos α e β as duas raízes de $x^2-6x+3k=0$.

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=3k$ ☜ Pelas relações entre raízes e coeficientes.

$\alpha\beta=3k>0$ ☜ O sinal de (raiz positiva) x (raiz positiva) é positivo.

$k>0 \quad \cdots ①$

Também, de $\dfrac{D}{4}=9-3k>0$ ☜ A condição para que se tenha duas raízes reais e distintas é $D>0$.

$k<3 \quad \cdots ②$

De ① e ② temos:

$0<k<3$

1. Determine o intervalo de k para que a equação do 2º grau $3x^2+8x+2k=0$ tenha duas raízes reais, distintas e negativas.

[Res.] Consideremos α e β as duas raízes de $3x^2+8x+2k=0$

$\alpha+\beta=-\dfrac{8}{3},\ \alpha\beta=\dfrac{2}{3}k$

$\alpha\beta=\dfrac{2}{3}k>0$ [O sinal de (raiz negativa)x(raiz negativa) é positivo.]

$k>0 \quad \cdots ①$

De $\dfrac{D}{4}=16-6k>0$

$k<\dfrac{8}{3} \cdots ②$

De ① e ② temos: $\mathbf{0<k<\dfrac{8}{3}}$

J 139b

2. Determine o intervalo de m para que a equação do 2º grau $x^2-2x-m+1=0$ tenha duas raízes α, β que sejam reais, distintas e positivas.

[Res.] $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-m+1$

$\alpha\beta=-m+1>0$

$m<1 \quad \cdots ①$

De $\frac{D}{4}=1-(-m+1)$

$=m>0 \quad \cdots ②$

De ① e ② temos:

$\mathbf{0<m<1}$

I) Vamos determinar o intervalo de k, quando os sinais das duas raízes reais e distintas α e β ($x^2-6x+3k=0$) sejam diferentes (reais positivos e reais negativos).

[Res.] $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=3k$

De $\alpha\beta=3k<\boxed{0}$ ☜ O sinal de (raiz positiva) x (raiz negativa) é negativo.

$k<\boxed{0} \quad \cdots ①$

Também, de $\frac{D}{4}=9-3k>0$, $k<3 \quad \cdots ②$ ☜ Então o intervalo ② não é necessário.

Se o valor de k está dentro do intervalo ①

satisfaz ② também.

Poranto, de ① $k<\boxed{0}$.

II) Considerando α e β com sinais opostos, as duas raízes reais e distintas da equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$.

$$\begin{cases}\alpha.\beta=\frac{c}{a}<0\\ D=b^2-4ac>0\end{cases}$$

Quando $\frac{c}{a}<0$, $ac<0$ o que significa que o discriminante é sempre positivo, ou seja, $D>0$. Portanto, devemos encontrar a condição na qual $\alpha\beta<0$.

J 140a Relação entre raízes e coeficientes

(14 pontos)

1. Construa a equação do 2º grau que tenha as seguintes raízes.

(1) $\frac{2+\sqrt{5}}{3}, \frac{2-\sqrt{5}}{3}$

[Res.] $\alpha+\beta=\frac{4}{3}$

$\alpha\beta=-\frac{1}{9}$

Portanto, $\boldsymbol{x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}=0}$. $\boldsymbol{(9x^2-12x-1=0)}$

(2) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

[Res.] $\alpha+\beta=-1$

$\alpha\beta=1$

Portanto, $\boldsymbol{x^2+x+1=0}$.

2. Determine o valor das seguintes expressões quando as raízes da equação do 2º grau $x^2+5x-1=0$ forem α e β $(\alpha>\beta)$.

(1) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$

[Res.] $\alpha+\beta=-5$

$\alpha\beta=-1$

$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$

$=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$

$=25-3\cdot(-1)=\boldsymbol{28}$

(2) $(\alpha-2\beta)(2\alpha-\beta)$

[Res.] $(\alpha-2\beta)(2\alpha-\beta)=2\alpha^2-5\alpha\beta+2\beta^2$

$=2(\alpha+\beta)^2-9\alpha\beta$

$=2\cdot25-9\cdot(-1)=\boldsymbol{59}$

J 140b

3. Considerando que as raízes da equação do 2º grau $x^2+2mx+m^2-2m+3=0$ sejam α e β $(\alpha<\beta)$,

(1) Determine os valores de $\alpha+\beta$ e $\alpha\beta$ em função de m.

[Res.] $\alpha+\beta=\mathbf{-2m}$

$\alpha\beta=\mathbf{m^2-2m+3}$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$-4ab$

(2) Determine os valores de $(\alpha-\beta)^2$ em função de m.

[Res.] $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=4m^2-4(m^2-2m+3)$

$=\mathbf{8m-12}$

(3) Determine o valor de m quando $\beta-\alpha=2$.

[Res.] Do exercício (2)

$(a-b) = a^2-2ab+b^2$

$(b-a) = b^2-2ab+a^2$

$(\alpha-\beta)^2=8m-12 \quad \cdots ①$

Podemos escrever a equação:

$(\alpha-\beta)^2=(\beta-\alpha)^2 \quad \cdots ②$

De ① e ②:

$8m-12=(\beta-\alpha)^2$

$8m-12=2^2$

$\mathbf{m=2}$

J 141a Sistemas de equações

(33 pontos)

Resolva os seguintes sistemas de equações:

Exemplo

$$\begin{cases} y = 2x - 1 & \cdots\cdots ① \\ x^2 + y^2 = 29 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

[Res.] Substituindo ① em ②,

$$x^2 + (2x-1)^2 = 29$$
$$5x^2 - 4x - 28 = 0$$
$$(x+2)(5x-14) = 0$$

Portanto, $x = -2, \dfrac{14}{5}$

Substituindo $x = -2$ em ①,

$y = -5$

Substituindo $x = \dfrac{14}{5}$ em ①,

$y = \dfrac{23}{5}$

R.: $\begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{14}{5} \\ y = \dfrac{23}{5} \end{cases}$

(1) $\begin{cases} y = 2x - 1 & \cdots\cdots ① \\ x^2 + y^2 = 13 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] Substituindo ① em ②,

$$x^2 + (2x-1)^2 = 13$$
$$5x^2 - 4x - 12 = 0$$
$$(x-2)(5x+6) = 0$$
$$x = 2, -\frac{6}{5}$$

Substituindo $x = 2$ em ①,

$y = 3$

Substituindo $x = -\dfrac{6}{5}$ em ①,

$y = -\dfrac{17}{5}$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = 3} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x = -\dfrac{6}{5}} \\ \boldsymbol{y = -\dfrac{17}{5}} \end{cases}$

J 141b

(2) $\begin{cases} y = x+3 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2 = 5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] Substituindo ① em ②,

$$x^2+(x+3)^2 = 5$$
$$2x^2+6x+4 = 0$$
$$x^2+3x+2 = 0$$
$$(x+2)(x+1) = 0$$
$$x = -2,\ -1$$

Substituindo $x = -1$ em ①,

$$y = 2$$

Substituindo $x = -2$ em ①,

$$y = 1$$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x = -2} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x = -1} \\ \boldsymbol{y = 2} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = y+1 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2 = 5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] Substituindo ① em ②,

$$(y+1)^2+y^2 = 5$$
$$2y^2+2y-4 = 0$$
$$y^2+y-2 = 0$$
$$(y+2)(y-1) = 0$$
$$y = -2,\ 1$$

Substituindo $y = 1$ em ①,

$$x = 2$$

Substituindo $y = -2$ em ①,

$$x = -1$$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x = -1} \\ \boldsymbol{y = -2} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$

J 142a Sistemas de equações

(25 pontos)

Resolva os seguintes sistemas de equações:

(1) $\begin{cases} y = 2x+1 & \cdots\cdots ① \\ x^2 - y^2 = -21 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] Substituindo ① em ②,

$$x^2-(2x+1)^2 = -21$$
$$3x^2+4x-20 = 0$$
$$(x-2)(3x+10) = 0$$
$$x = 2,\ -\frac{10}{3}$$

Substituindo $x = 2$ em ①,

$$y = 5$$

Substituindo $x = -\frac{10}{3}$ em ①,

$$y = -\frac{17}{3}$$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = 5} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x = -\frac{10}{3}} \\ \boldsymbol{y = -\frac{17}{3}} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y = 2x-1 & \cdots\cdots ① \\ x^2 - 2y^2 = -1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] Substituindo ① em ②,

$$x^2-2(2x-1)^2 = -1$$
$$7x^2-8x+1 = 0$$
$$(x-1)(7x-1) = 0$$
$$x = 1,\ \frac{1}{7}$$

Substituindo $x = 1$ em ①,

$$y = 1$$

Substituindo $x = \frac{1}{7}$ em ①,

$$y = -\frac{5}{7}$$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{1}{7}} \\ \boldsymbol{y = -\frac{5}{7}} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y = x - 3 & \cdots\cdots ① \\ x^2 - y^2 = 15 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] Substituindo ① em ②,

$$x^2 - (x-3)^2 = 15$$
$$6x = 24$$
$$x = 4$$

Substituindo $x = 4$ em ①,

$$y = 1$$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x = 4} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x - y = 3 & \cdots\cdots ① \\ x^2 - y^2 = 3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] Após reorganizarmos ①,

$$y = 2x - 3 \quad \cdots\cdots ③$$

Substituindo ③ em ②,

$$x^2 - (2x-3)^2 = 3$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x-2)^2 = 0$$
$$x = 2$$

Substituindo $x = 2$ em ③,

$$y = 1$$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$

KUMON J 143a

Sistemas de equações

(33 pontos)

Resolva os seguintes sistemas de equações:

(1) $\begin{cases} 3x = 2y & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 8 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De ①, $x = \dfrac{2}{3}y$ $\cdots\cdots ③$

Substituindo ③ em ②,

$$\frac{1}{4} \times \frac{4}{9}y^2 + \frac{y^2}{9} = 8$$

$$y^2 = 36$$

$$y = \pm 6$$

Substituindo $y = 6$ em ③,

$$x = 4$$

Substituindo $y = -6$ em ③,

$$x = -4$$

R.: $\begin{cases} x = \boxed{4} \\ y = \boxed{6} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\boxed{4} \\ y = -\boxed{6} \end{cases}$

Quando sua resposta contiver duas soluções com os mesmos números, mas sinais diferentes, você pode combiná-las como as seguintes:

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ podem ser escritas como $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ podem ser escritas como $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \mp 2 \end{cases}$

Quando você fizer essa combinação, mantenha os sinais positivos e negativos na ordem correta.

(2) $\begin{cases} y = x+1 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2 = 3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ (As respostas são números irracionais.)

[Res.] Substituindo ① em ②,

$$x^2+(x+1)^2 = 3$$
$$2x^2+2x-2 = 0$$
$$x^2+x-1 = 0$$
$$x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Substituindo $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ em ①,

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Substituindo $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ em ①,

$$y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \\ \boldsymbol{y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ \boldsymbol{y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x-2y = 2 & \cdots\cdots ① \\ x^2-y^2+3 = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ (As respostas são números irracionais.)

[Res.] De ①,

$$y = 2x-1 \quad \cdots\cdots ③$$

Substituindo ③ em ②,

$$x^2-(2x-1)^2+3 = 0$$
$$3x^2-4x-2 = 0$$
$$x = \frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$$

Substituindo $x = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$ em ③,

$$y = \frac{1+2\sqrt{10}}{3}$$

Substituindo $x = \frac{2-\sqrt{10}}{3}$ em ③,

$$y = \frac{1-2\sqrt{10}}{3}$$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{2+\sqrt{10}}{3}} \\ \boldsymbol{y = \frac{1+2\sqrt{10}}{3}} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{2-\sqrt{10}}{3}} \\ \boldsymbol{y = \frac{1-2\sqrt{10}}{3}} \end{cases}$

J 144a Sistemas de equações

(33 pontos)

Resolva os seguintes sistemas de equações:

Exemplo

$$\begin{cases} xy+x-y=1 & \cdots\cdots ① \\ xy-3x+y=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

[Res.] De ① − ②, $4x-2y=-4$

Assim, $y=2x+2$ $\cdots\cdots$ ③

Substituindo ③ em ① :

$x(2x+2)+x-(2x+2)=1$

$2x^2+x-3=0$

$(x-1)(2x+3)=0$

Portanto, $x=1,\ -\dfrac{3}{2}$

Substituindo $x=1$ em ③,

$y=4$

Substituindo $x=-\dfrac{3}{2}$ em ③,

$y=-1$

R.: $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=-1 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} xy+3x-3y+3=0 & \cdots\cdots ① \\ xy-x-y+1=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De ① − ②,

$4x-2y+2=0$

$y=2x+1$ $\cdots\cdots$ ③

Substituindo ③ em ①,

$x(2x+1)+3x-3(2x+1)+3=0$

$2x^2-2x=0$

$x(x-1)=0$

$x=0,\ 1$

Substituindo $x=0$ em ③,

$y=1$

Substituindo $x=1$ em ③,

$y=3$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=0} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=3} \end{cases}$

J 144b

(2) $\begin{cases} xy+x+y=5 & \cdots\cdots ① \\ 2xy+x+3y=9 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De ① × 2 − ②, $x-y=1$

Portanto, $y=x-1$ $\cdots\cdots$ ③

Substituindo ③ em ①,

$x(x-1)+x+(x-1)=5$

$x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$x=-3,\ 2$

Substituindo $x=-3$ em ③,

$y=-4$

Substituindo $x=2$ em ③,

$y=1$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=-3} \\ \boldsymbol{y=-4} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} xy+2x+2y+1=0 & \cdots\cdots ① \\ 3xy+3x+5y+3=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De ① × 3,

$3xy+6x+6y+3=0$ $\cdots\cdots$ ③

③ − ② $y=-3x$ $\cdots\cdots$ ④

Substituindo ④ em ①,

$x(-3x)+2x+2(-3x)+1=0$

$3x^2+4x-1=0$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$

Substituindo $x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$ em ④,

$y=2-\sqrt{7}$

Substituindo $x=\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}$ em ④,

$y=2+\sqrt{7}$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}} \\ \boldsymbol{y=2-\sqrt{7}} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}} \\ \boldsymbol{y=2+\sqrt{7}} \end{cases}$

KUMON J 145a

Sistemas de equações

(33 pontos)

Resolva os seguintes sistemas de equações:

Exemplo

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y=7 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2+4x-4y=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

[Res.] De ① − ②, $-6x+6y=6$

Temos $x=y-1$ $\cdots\cdots ③$

Substituindo ③ em ①,

$(y-1)^2+y^2-2(y-1)+2y=7$

$2y^2-2y-4=0$

$(y+1)(y+2)=0$

Portanto, $y=-1, 2$

Substituindo $y=-1$ em ③,

$x=-2$

Substituindo $y=2$ em ③,

$x=1$

R.: $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y-10=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2+4x+4y-10=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De ① − ②,

$-8x-8y=0$

$y=-x$ $\cdots\cdots ③$

Substituindo ③ em ①,

$2x^2=10$

$x=\pm\sqrt{5}$

Substituindo $x=\sqrt{5}$ em ③,

$y=-\sqrt{5}$

Substituindo $x=-\sqrt{5}$ em ③,

$y=\sqrt{5}$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=+\sqrt{5}} \\ \boldsymbol{y=-\sqrt{5}} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=-\sqrt{5}} \\ \boldsymbol{y=+\sqrt{5}} \end{cases}$

J 145b

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+x-y-6=0 & \cdots\cdots ① \\ 2x^2+2y^2+3x+y-12=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De ①×2−②,

$-x-3y=0$

$x=-3y \quad \cdots\cdots ③$

Substituindo ③ em ①,

$9y^2+y^2-3y-y-6=0$

$5y^2-2y-3=0$

$(y-1)(5y+3)=0$

$y=1,\ -\frac{3}{5}$

Substituindo $y=1$ em ③,

$x=-3$

Substituindo $y=-\frac{3}{5}$ em ③,

$x=\frac{9}{5}$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=-3} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x=\frac{9}{5}} \\ \boldsymbol{y=-\frac{3}{5}} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x^2+2y^2-x+4y-8=0 & \cdots\cdots ① \\ 6x^2+4y^2+4x+11y-25=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De ①×2−②,

$-6x-3y+9=0$

$y=-2x+3 \quad \cdots\cdots ③$

Substituindo ③ em ①,

$3x^2+2(-2x+3)^2-x+4(-2x+3)-8=0$

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x=1,\ 2$

Substituindo $x=1$ em ③,

$y=1$

Substituindo $x=2$ em ③,

$y=-1$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$

J 146a Sistemas de equações

(50 pontos)

Resolva os seguintes sistemas de equações:

Exemplo

$$\begin{cases}(x-y)(x+2y)=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-xy+2y^2=16 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

[Res.] De ①, $x=y$ ou $x=-2y$.

$$\begin{cases}x=y & \cdots\cdots ③ \\ x^2-xy+2y^2=16 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

Substituindo ③ em ②,

$x^2-x^2+2x^2=16$

$x^2=8$

Assim, $x=\pm 2\sqrt{2}$

De ③, $y=\pm 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases}x=-2y & \cdots\cdots ③' \\ x^2-xy+2y^2=16 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

Substituindo ③' em ②,

$4y^2+2y^2+2y^2=16$

$y^2=2$

Assim, $y=\pm\sqrt{2}$

De ③, $x=\mp 2\sqrt{2}$

R.: $\begin{cases}x=2\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2}\end{cases}$

(1) $\begin{cases}(x-3y)(x-2y)=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-2xy+6y^2=6 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

[Res.] De ①, $x=3y$ ou $x=2y$.

$$\begin{cases}x=3y & \cdots\cdots ③ \\ x^2-2xy+6y^2=6 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

Substituindo ③ em ②,

$9y^2-6y^2+6y^2=6$

$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

De ③, $x=\pm\sqrt{6}$

$$\begin{cases}x=2y & \cdots\cdots ③' \\ x^2-2xy+6y^2=6 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

Substituindo ③' em ②,

$4y^2-4y^2+6y^2=6$

$y=\pm 1$

De ③', $x=\pm 2$

R.: $\begin{cases}\boldsymbol{x=+\sqrt{6}} \\ \boldsymbol{y=+\dfrac{\sqrt{6}}{3}}\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{x=-\sqrt{6}} \\ \boldsymbol{y=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}}\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{x=+2} \\ \boldsymbol{y=+1}\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=-1}\end{cases}$

J 146b

Resolva os seguintes sistemas de equações:

Exemplo

$$\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-5xy+6y^2=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

[Res.] De ①, $(x-y)(x-3y)=0$. Assim $x=y$ ou $x=3y$.

$$\begin{cases} x=y & \cdots\cdots ③ \\ x^2-5xy+6y^2=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

Substituindo ③ em ②,

$x^2-5x^2+6x^2=2$

$x=\pm 1$

De ③, $y=\pm 1$

$$\begin{cases} x=3y & \cdots\cdots ③' \\ x^2-5xy+6y^2=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

Substituindo ③' em ②

$9y^2-15y^2+6y^2=2$

$0\cdot y^2=2$

Não existe valor de y que satisfaça esta equação. Portanto, não há solução.

R.: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-2xy-3y^2=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De ①, $(x+2y)(x+y)=0$. Portanto, $x=-2y$ ou $x=-y$.

$$\begin{cases} x=-2y & \cdots\cdots ③ \\ x^2-2xy-3y^2=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

Substituindo ③ em ②,

$4y^2+4y^2-3y^2=5$

$y=\pm 1$

De ③, $x=\mp 2$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=+1} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=+2} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$

$$\begin{cases} x=-y & \cdots\cdots ③' \\ x^2-2xy-3y^2=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

Substituindo ③' em ②,

$y^2+2y^2-3y^2=5$

$0\cdot y^2=5$

Não existe valor y de que satisfaça esta equação. Portanto, não há solução.

J 147a Sistemas de equações

(33 pontos)

Resolva os seguintes sistemas de equações:

Exemplo

$$\begin{cases} x+y=9 & \cdots\cdots ① \\ xy=7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

[Res.]

Os valores procurados de x e y são as raízes da equação:

$t^2-9t+7=0$

Portanto, $t=\dfrac{9\pm\sqrt{53}}{2}$

☞ Quando as raízes forem α, β temos, pelas relações entre raízes e coeficientes que: $t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0$ Neste caso consideramos: $\alpha=x,\ \beta=y$.

R.: $\begin{cases} x=\dfrac{9+\sqrt{53}}{2} \\ y=\dfrac{9-\sqrt{53}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{9-\sqrt{53}}{2} \\ y=\dfrac{9+\sqrt{53}}{2} \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots ① \\ xy=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] x e y são as raízes de

$t^2-4t+2=0$

$t=2\pm\sqrt{2}$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=2+\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y=2-\sqrt{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=2-\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y=2+\sqrt{2}} \end{cases}$

Poder-se-ia resolver, pelo método da substituição, considerando de ①, $y=9-x$ e substituindo este em ②. No entanto, quando se tem o par $x+y$, xy, muitas vezes é mais fácil utilizar-se da relação entre raízes e coeficientes.

J 147b

(2) $\begin{cases} x+y=5 \cdots\cdots ① \\ xy=-6 \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] x e y são as raízes de

$$t^2-5t--6=0$$

$$(t-6)(t+1)=0$$

$$t=6,\ -1$$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=6} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=6} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=\sqrt{3}+1 \cdots\cdots ① \\ xy=\sqrt{3} \qquad\quad \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] x e y são as raízes de

$$t^2-(\sqrt{3}+1)t+\sqrt{3}=0$$

$$(t-1)(t-\sqrt{3})=0$$

$$t=1,\ \sqrt{3}$$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=\sqrt{3}} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=\sqrt{3}} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$

J 148a Sistemas de equações

(33 pontos)

Resolva os seguintes sistemas de equações:

Exemplo

$\begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots ① \\ x^2+xy+y^2=13 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De $①^2-②$,

$xy=3 \quad \cdots\cdots ③$

De ① e ③, os valores procurados de x, y são as raízes de $t^2-4t+3=0$.

Temos, então: $(t-3)(t-1)=0$

De $t=3, 1$

R.: $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots ① \\ x^2-xy+y^2=22 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De $①^2-②$,

$3xy=-6$

$xy=-2 \quad \cdots\cdots ③$

De ① e ③, x e y são as raízes de

$t^2-4t-2=0$

$t=2\pm\sqrt{6}$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=2+\sqrt{6}} \\ \boldsymbol{y=2-\sqrt{6}} \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x=2-\sqrt{6}} \\ \boldsymbol{y=2+\sqrt{6}} \end{cases}$

J 148b

(2) $\begin{cases} xy = 3 & \cdots\cdots ① \\ x^2 + y^2 = 10 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ (Há 4 pares de solução)

[Res.] De ①×2+②,

$(x+y)^2 = 16$

$x+y = \pm 4 \quad \cdots\cdots ③$

De ① e ③, x e y são as raízes de

$t^2 - 4t + 3 = 0$ ou $t^2 + 4t + 3 = 0$

$(t-1)(t-3) = 0$ | $(t+1)(t+3) = 0$

$t = 1, 3$ | $t = -1, -3$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases} \begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=3} \end{cases}$ | $\begin{cases} \boldsymbol{x=-3} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases} \begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-3} \end{cases}$

$$\left[\begin{cases} \boldsymbol{x=\pm 1} \\ \boldsymbol{y=\pm 3} \end{cases} \begin{cases} \boldsymbol{x=\pm 3} \\ \boldsymbol{y=\pm 1} \end{cases} \right]$$

(3) $\begin{cases} xy = 2 & \cdots\cdots ① \\ x^2 + y^2 = 4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De ①×2+②,

$(x+y)^2 = 8$

$x+y = \pm 2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ③$

De ① e ③, x e y são as raízes de

$t^2 - 2\sqrt{2}\,t + 2 = 0$ ou $t^2 + 2\sqrt{2}\,t + 2 = 0$

$(t-\sqrt{2})^2 = 0$ | $(t+\sqrt{2})^2 = 0$

$t = \sqrt{2}$ | $t = -\sqrt{2}$

(raiz dupla) (raiz dupla)

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=+\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y=+\sqrt{2}} \end{cases} \begin{cases} \boldsymbol{x=-\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y=-\sqrt{2}} \end{cases}$ $\left[\begin{cases} \boldsymbol{x=\pm\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{y=\pm\sqrt{2}} \end{cases} \right]$

KUMON J 149a

Sistemas de equações

(50 pontos)

Resolva os seguintes sistemas de equações:

(1) $\begin{cases} x^2+9xy+y^2=23 & \cdots\cdots ① \\ xy+x+y=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] Fazendo $x+y=A$, $xy=B$ tem-se de, ① e ②:

$\begin{cases} A^2+7B=23 & \cdots\cdots ③ \\ A+B=5 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

De ④, $B=5-A$

Substituindo este em ③,

$A^2+7(\ 5-A\ )=23$

$A^2-\boxed{7}A+\boxed{12}=0$

$(\ A-3\ )(\ A-4\ )=0$

$A=\boxed{3}, \boxed{4}$

Portanto, $B=\boxed{2}, \boxed{1}$

(i) Quando: $\begin{cases} x+y=\boxed{3} \\ xy=\boxed{2} \end{cases}$

x e y são as raízes de

$t^2-3t+2=0$

$(t-2)(t-1)=0$

$t=2, 1$

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

(ii) Quando: $\begin{cases} x+y=\boxed{4} \\ xy=\boxed{1} \end{cases}$

x e y são as raízes de

$t^2-4t+1=0$

$t=2\pm\sqrt{3}$

$\begin{cases} x=2+\sqrt{3} \\ y=2-\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-\sqrt{3} \\ y=2+\sqrt{3} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} xy = 12 & \cdots\cdots ① \\ x^2 + y^2 = 25 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] Assumindo que $x + y = A$, $xy = B$,

De ①e②,

$\begin{cases} B = 12 & \cdots\cdots ③ \\ A^2 - 2B = 25 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

Substituindo ③ em ④,

$A^2 - 24 = 25$

$A = \pm 7$

$\begin{cases} A = \pm 7 \\ B = 12 \end{cases}$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$
$$x^2 + y^2 = A^2 - 2B$$

(i) Quando $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$

x e y são as raízes de

$t^2 - 7t + 12 = 0$

$(t-4)(t-3) = 0$

$t = 4, 3$

(ii) Quando $\begin{cases} x + y = -7 \\ xy = 12 \end{cases}$

x e y são as raízes de

$t^2 + 7t + 12 = 0$

$(t+4)(t+3) = 0$

$t = -4, -3$

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$

$\left[\begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 4 \end{cases} \begin{cases} x = \pm 4 \\ y = \pm 3 \end{cases} \right]$

J 150a Sistemas de equações

(25 pontos)

Resolva os seguintes sistemas de equações:

(1) $\begin{cases} x-y=3 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=9 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De ①,

$y=x-3 \quad \cdots\cdots ③$

Substituindo ③ em ②,

$x^2+(x-3)^2=9$

$x(x-3)=0$

$x=0,\ 3$

Substituindo $x=0$ em ③,

$y=-3$

Substituindo $x=3$ em ③,

$y=0$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=0} \\ \boldsymbol{y=-3} \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=0} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y=3 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2-4x+4y=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

[Res.] De ①−②,

$2x-2y=2$

$y=x-1 \quad \cdots\cdots ③$

Substituindo ③ em ①,

$x^2+(x-1)^2-2x+2(x-1)=3$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=2,\ -1$

Substituindo $x=2$ em ③,

$y=1$

Substituindo $x=-1$ em ③,

$y=-2$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-2} \end{cases}$

(3) $\begin{cases}(x-y)(x+2y)=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-2xy+4y^2=12 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

[Res.] De ①,

$x=y$ ou $x=-2y$.

Substituindo $x=y$ em ②,

$x^2-2x^2+4x^2=12$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

(e como $x=y$) $y=\pm 2$

Substituindo $x=-2y$ em ②,

$4y^2+4y^2+4y^2=12$

$y^2=1$

$y=\pm 1$

(e como $x=-2y$) $x=\mp 2$

R.: $\begin{cases}\boldsymbol{x=+2} \\ \boldsymbol{y=+2}\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=-2}\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{x=+2} \\ \boldsymbol{y=-1}\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{y=+1}\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x+y=5 & \cdots\cdots ① \\ x^3+y^3=35 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

[Res.] De $①^3-②$,

$3xy(x+y)=90$

De ①

$3xy(5)=90$

$xy=6 \qquad \cdots\cdots ③$

De ① e ③, x e y são as raízes de

$t^2-5t+6=0$

$(t-3)(t-2)=0$

$t=3,2$

R.: $\begin{cases}\boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=2}\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{x=2} \\ \boldsymbol{y=3}\end{cases}$

J 151a Divisão de polinômios

(16 pontos)

Efetue as seguintes divisões:

Exemplo

$$\begin{array}{r|l} x^2+5x+6 & x+3 \\ \cline{2-2} x^2+3x & x+2 \\ \cline{1-1} 2x+6 & \\ 2x+6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$(x+3)\times x$ ☞

$(x+3)\times 2$ ☞

(1) $\begin{array}{r|l} x^2+8x+15 & x+5 \\ \cline{2-2} x^2+5x & \boldsymbol{x+3} \\ \cline{1-1} 3x+15 & \\ 3x+15 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$

R: $\boldsymbol{x+3}$

(2) $\begin{array}{r|l} 2x^2+3x-9 & 2x-3 \\ \cline{2-2} 2x^2-3x & \boldsymbol{x+3} \\ \cline{1-1} 6x-9 & \\ 6x-9 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$

R: $\boldsymbol{x+3}$

(3) $\begin{array}{r|l} 6x^2+11xy-10y^2 & 3x-2y \\ \cline{2-2} 6x^2-4xy & \boldsymbol{2x+5y} \\ \cline{1-1} 15xy-10y^2 & \\ 15xy-10y^2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$

R: $\boldsymbol{2x+5y}$

(4) $\begin{array}{r|l} 6x^2-xy-12y^2 & 3x+4y \\ \cline{2-2} 6x^2+8xy & \boldsymbol{2x-3y} \\ \cline{1-1} -9xy-12y^2 & \\ -9xy-12y^2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$

R: $\boldsymbol{2x-3y}$

J 151b

Exemplo

Como não existe o termo em x^3, deixar em branco ou preencher com coeficiente 0.

$$\begin{array}{r|l} x^4 \quad + x^2-2x+6 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2} x^4-2x^3+2x^2 & x^2+2x+3 \\ \cline{1-1} \quad 2x^3- x^2-2x & \\ \quad 2x^3-4x^2+4x & \\ \cline{1-1} \quad\quad 3x^2-6x+6 & \\ \quad\quad 3x^2-6x+6 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

(1) $$\begin{array}{r|l} 4x^4+10x^3+13x^2 \quad -9 & x^2+2x+3 \\ \cline{2-2} 4x^4+ 8x^3+12x^2 & \mathbf{4x^2+ 2x - 3} \\ \cline{1-1} \quad 2x^3+ x^2 & \\ \quad 2x^3+ 4x^2+6x & \\ \cline{1-1} \quad\quad - 3x^2-6x-9 & \\ \quad\quad - 3x^2-6x-9 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

R: $\mathbf{4x^2+2x-3}$

(2) $$\begin{array}{r|l} x^4 \quad + x^2-2x+6 & x^2-2x+2 \\ \cline{2-2} x^4-2x^3+2x^2 & \mathbf{x^2+2x+3} \\ \cline{1-1} \quad 2x^3- x^2-2x & \\ \quad 2x^3-4x^2+4x & \\ \cline{1-1} \quad\quad 3x^2-6x+6 & \\ \quad\quad 3x^2-6x+6 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

R: $\mathbf{x^2+2x+3}$

J 152a Divisão de polinômios

(25 pontos)

Efetue as seguintes divisões:

(1) $(x^4+4x^2+16)\div(x^2-2x+4)$

$$\begin{array}{r|l} x^4+4x^2+16 & x^2-2x+4 \\ \hline x^4-2x^3+4x^2 & \boldsymbol{x^2+2x+4} \\ \hline 2x^3 & \\ 2x^3-4x^2+8x & \\ \hline 4x^2-8x+16 & \\ 4x^2-8x+16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Como não existe os termos em x^3 e x, deixar em branco ou preencher com coeficiente zero.

R: $\boldsymbol{x^2+2x+4}$

(2) $(x^3+8)\div(x+2)$

$$\begin{array}{r|l} x^3+8 & x+2 \\ \hline x^3+2x^2 & \boldsymbol{x^2-2x+4} \\ \hline -2x^2 & \\ -2x^2-4x & \\ \hline 4x+8 & \\ 4x+8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

R: $\boldsymbol{x^2-2x+4}$

J 152b

(3) $(a^4+a^2b^2+b^4)\div(a^2+ab+b^2)$

$$
\begin{array}{r|l}
a^4+a^2b^2+b^4 & a^2+ab+b^2 \\
\cline{2-2}
a^4+a^3b+a^2b^2 & \boldsymbol{a^2-ab+b^2} \\
\cline{1-1}
-a^3b & \\
-a^3b-a^2b^2-ab^3 & \\
\cline{1-1}
a^2b^2+ab^3+b^4 & \\
a^2b^2+ab^3+b^4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

R: $\boldsymbol{a^2-ab+b^2}$

(4) $(x^4-y^4)\div(x-y)$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-y^4 & x-y \\
\cline{2-2}
x^4-x^3y & \boldsymbol{x^3+x^2y+xy^2+y^3} \\
\cline{1-1}
x^3y & \\
x^3y-x^2y^2 & \\
\cline{1-1}
x^2y^2 & \\
x^2y^2-xy^3 & \\
\cline{1-1}
xy^3-y^4 & \\
xy^3-y^4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

R: $\boldsymbol{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$

J 153a Divisão de polinômios

(33 pontos)

Efetue as seguintes divisões:

Exemplo

$(2x^3+5x^2+9)\div(2x^2+x+3)$

[Res]
$$\begin{array}{r|l} 2x^3+5x^2 \quad +9 & 2x^2+x+3 \\ \underline{2x^3+\ x^2+3x\ \ \ } & x+2 \\ 4x^2-3x+9 & \\ \underline{4x^2+2x+6} & \\ -5x+3 & \end{array}$$

R: quociente $x+2$ resto $-5x+3$

(1) $(2x^4-18x^2+3x-4)\div(x^3-3x^2-2)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 \quad -18x^2+3x-\ 4 & x^3-3x^2-2 \\ \underline{2x^4-6x^3 \quad\quad -4x\ \ \ } & \mathbf{2x+6} \\ 6x^3-18x^2+7x-\ 4 & \\ \underline{6x^3-18x^2 \quad\quad -12} & \\ \mathbf{7x+\ 8} & \end{array}$$

R: quociente $2x+6$ resto $7x+8$

J 153b

(2) $(2a^3+a^2-5a+2)\div(a+1)$

$$\begin{array}{r|l} 2a^3+\ a^2-5a+2 & a+1 \\ \cline{2-2} 2a^3+2a^2 & \boldsymbol{2a^2-a-4} \\ \cline{1-1} \quad -a^2-5a & \\ \quad -a^2-\ a & \\ \cline{1-1} \quad\quad -4a+2 & \\ \quad\quad -4a-4 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad 6 & \end{array}$$

R: quociente $\boldsymbol{2a^2-a-4}$ resto $\boldsymbol{6}$

(3) $(x^2-3xy+2y^2+3x-6y-8)\div(x-y+4)$

$$\begin{array}{r|l} x^2-3xy+2y^2+3x-6y-8 & x-y+4 \\ \cline{2-2} x^2-\ xy\quad\quad +4x & \boldsymbol{x-2y-1} \\ \cline{1-1} \quad -2xy+2y^2-\ x-6y & \\ \quad -2xy+2y^2\quad\quad -8y & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad\quad -\ x+2y-8 & \\ \quad\quad\quad\quad -\ x+\ y-4 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad\quad\quad \boldsymbol{y-4} & \end{array}$$

R: quociente $\boldsymbol{x-2y-1}$ resto $\boldsymbol{y-4}$

J 154a Divisão de polinômios

(25 pontos)

Relação entre o quociente e o resto

- Quando 17 é dividido por 5, ($17 \div 5 = 3$ resto 2), o quociente é 3 com resto 2. Esta relação pode ser escrita como $17 = 5 \times 3 + 2$.
- Analogamente, na divisão $(x^3 - x^2 - 1) \div (x - 2)$ o quociente é $x^2 + x + 2$ com resto 3. Esta relação pode ser ecrita como:

$$x^3 - x^2 - 1 = (x - 2)(x^2 + x + 2) + 3.$$

1. Responda as seguintes questões:

(1) Determine o quociente e o resto quando $x^3 + 4x^2 - 5x + 3$ é dividido por $x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 - 5x + 3 & x - 2 \\ \cline{2-2} x^3 - 2x^2 & \boldsymbol{x^2 + 6x + 7} \\ \cline{1-1} \quad 6x^2 - 5x & \\ \quad 6x^2 - 12x & \\ \cline{1-1} \quad\quad 7x + 3 & \\ \quad\quad 7x - 14 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad \mathbf{17} & \end{array}$$

R: quociente $\boldsymbol{x^2 + 6x + 7}$ resto **17**

(2) Do resultado de (1), mostre a relação entre: $x^3 + 4x^2 - 5x + 3$ e $x - 2$.

R: $x^3 + 4x^2 - 5x + 3 = \boldsymbol{(x - 2)(x^2 + 6x + 7) + 17}$

J 154b

2. Divida A por B e mostre a sua relação:

(1) $A = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ $\quad B = x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + x^2 - 5x + 2 & x + 1 \\
\cline{2-2}
2x^3 + 2x^2 & \mathbf{2x^2 - x - 4} \\
\cline{1-1}
\quad - x^2 - 5x & \\
\quad - x^2 - x & \\
\cline{1-1}
\quad\quad -4x + 2 & \\
\quad\quad -4x - 4 & \\
\cline{1-1}
\quad\quad\quad \mathbf{6} &
\end{array}
$$

R: $A = (x+1)(\boxed{2x^2 - x - 4}) + \boxed{6}$

(2) $A = x^3 - 3x^2 + 4x + 30$ $\quad B = x - 2$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 + 4x + 30 & x - 2 \\
\cline{2-2}
x^3 - 2x^2 & \mathbf{x^2 - x + 2} \\
\cline{1-1}
\quad - x^2 + 4x & \\
\quad - x^2 + 2x & \\
\cline{1-1}
\quad\quad 2x + 30 & \\
\quad\quad 2x - 4 & \\
\cline{1-1}
\quad\quad\quad \mathbf{34} &
\end{array}
$$

R: $A = (x-2)(x^2 - x + 2) + 34$

J 155a Divisão de polinômios

(25 pontos)

1. Divida A por B e mostre a sua relação:

(1) $A = x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x + 9$ $\quad B = x - 3$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x + 9 & x - 3 \\
\cline{2-2}
x^4 - 3x^3 & \boldsymbol{x^3 + 4x^2 + 4x + 3} \\
\cline{1-1}
\quad 4x^3 - 8x^2 & \\
\quad 4x^3 - 12x^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad 4x^2 - 9x & \\
\qquad 4x^2 - 12x & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 3x + 9 & \\
\qquad\quad 3x - 9 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad \mathbf{18} &
\end{array}
$$

R: $A = (x-3)(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) + 18$

(2) $A = 2x^4 + 25x^3 + 4x + 10$ $\quad B = 2x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 + 25x^3 + 4x + 10 & 2x + 1 \\
\cline{2-2}
2x^4 + x^3 & \boldsymbol{x^3 + 12x^2 - 6x + 5} \\
\cline{1-1}
\quad 24x^3 & \\
\quad 24x^3 + 12x^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad -12x^2 + 4x & \\
\qquad -12x^2 - 6x & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 10x + 10 & \\
\qquad\quad 10x + 5 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad \mathbf{5} &
\end{array}
$$

R: $A = (2x+1)(x^3 + 12x^2 - 6x + 5) + 5$

J 155b

(3) $A = x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 3x + 9$ $\quad B = x^2 + 3x - 2$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+6x^3-7x^2+3x+9 & x^2+3x-2 \\
\cline{2-2}
x^4+3x^3-2x^2 & \boldsymbol{x^2+3x-14} \\
\cline{1-1}
3x^3-5x^2+3x & \\
3x^3+9x^2-6x & \\
\cline{1-1}
-14x^2+9x+9 & \\
-14x^2-42x+28 & \\
\cline{1-1}
\boldsymbol{51x-19} &
\end{array}
$$

R: $A = (x^2+3x-2)(x^2+3x-14)+51x-19$

(4) $A = x^3 + 6x^2 + 6x - 6$ $\quad B = x^2 + 3x - 3$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+6x^2+6x-6 & x^2+3x-3 \\
\cline{2-2}
x^3+3x^2-3x & \boldsymbol{x+3} \\
\cline{1-1}
3x^2+9x-6 & \\
3x^2+9x-9 & \\
\cline{1-1}
\boldsymbol{3} &
\end{array}
$$

R: $A = (x^2+3x-3)(x+3)+3$

J 156a Divisão de polinômios

(25 pontos)

Exemplo

Dividindo-se a expressão algébrica A por $2x^2-1$, temos $2x-1$ como quociente, e $x-2$ como resto. Determine A.

[Res.]

$A = (2x^2-1)(2x-1)+x-2$ Veja o J154a .

Logo,

$A = 4x^3-2x^2-x-1$

1. Dividindo-se a expressão algébrica A por $x+1$, temos x^2+2 como quociente, e 3 como resto. Determine A.

[Res.] $A = (x+1)(x^2+2)+3$

$= \boldsymbol{x^3+x^2+2x+5}$

2. Dividindo-se a expressão algébrica A por $2x+3$, temos x^2-2x+1 como quociente, e -2 como resto. Determine A.

[Res.] $A = (2x+3)(x^2-2x+1)-2$

$= 2x^3-4x^2+2x+3x^2-6x+3-2$

$= \boldsymbol{2x^3-x^2-4x+1}$

3. Dividindo-se a expressão algébrica A por x^2+1, temos x^2+1 como quociente, e $x+1$ como resto. Determine A.

[Res.] $A = (x^2+1)(x^2+1)+x+1$

$= \boldsymbol{x^4+2x^2+x+2}$

4. Dividindo-se a expressão algébrica A por x^2+x+1, temos x^2+1 como quociente, e $2x$ como resto. Determine A.

[Res.] $A = (x^2+x+1)(x^2+1)+2x$

$= x^4+x^2+x^3+x+x^2+1+2x$

$= \boldsymbol{x^4+x^3+2x^2+3x+1}$

J 157a Divisão de polinômios

(50 pontos)

Exemplo

Dividindo-se a expressão algébrica x^3+x^2+4x-1 por B, temos $x+1$ como quociente e $3x-2$ como resto. Determine B.

[Res.] $x^3+x^2+4x-1 = B(x+1)+3x-2$

Passar $3x-2$ para o 1º membro da equação.

$x^3+x^2+x+1 = B(x+1)$

Então:

$B = (x^3+x^2+x+1) \div (x+1)$

Efetuando-se a divisão temos:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2+x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} x^3+x^2 & x^2+1 \\ \cline{1-1} \quad x+1 & \\ \quad x+1 & \\ \cline{1-1} \quad 0 & \end{array}$$

R: $\boldsymbol{B = x^2+1}$

1. Dividindo-se a expressão algébrica $2x^3+x^2-x+1$ por B, temos $2x+3$ como quociente e -2 como resto. Determine B.

[Res.] $2x^3+x^2-x+1 = B(2x+3)-2$

$2x^3+x^2-x+3 = B(2x+3)$

Então:

$B = (2x^3+x^2-x+3) \div (2x+3)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+\ x^2-\ x+3 & 2x+3 \\ \cline{2-2} 2x^3+3x^2 & x^2-x+1 \\ \cline{1-1} \quad -2x^2-\ x & \\ \quad -2x^2-3x & \\ \cline{1-1} \qquad 2x+3 & \\ \qquad 2x+3 & \\ \cline{1-1} \qquad 0 & \end{array}$$

R: $\boldsymbol{B = x^2-x+1}$

Exemplo

Dividindo-se $2x^3 - x^2 - ax + b$ por $x^2 - 2x + 1$, o resto da divisão é $3x + 2$. Determine os valores de a e b.

[Res.]

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - ax + b & x^2 - 2x + 1 \\ \hline 2x^3 - 4x^2 + 2x & 2x + 3 \\ \hline 3x^2 - (a+2)x + b & \\ 3x^2 - 6x + 3 & \\ \hline (-a+4)x + b - 3 & \end{array}$$

Resto $= (-a+4)x + b - 3 = 3x + 2$

Logo:

$$\begin{cases} -a + 4 = 3 & \cdots ① \\ b - 3 = 2 & \cdots ② \end{cases}$$

Para que $(-a+4)x + b - 3$ seja igual $3x + 2$ é necessário que:

① igualar o coeficiente de x;

② igualar o termo independente.

De ① e ②:

$\boldsymbol{a = 1,\ b = 5}$

1. Dividindo-se $x^4 + ax^2 + b$ por $x^2 + x + 1$, o resto da divisão é $-2x + 2$.

Determine os valores de a e b.

[Res]:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + ax^2 + b & x^2 + x + 1 \\ \hline x^4 + x^3 + x^2 & x^2 - x + a \\ \hline -x^3 + (a-1)x^2 & \\ -x^3 - x^2 - x & \\ \hline ax^2 + x + b & \\ ax^2 + ax + a & \\ \hline (1-a)x + b - a & \end{array}$$

Logo:

$$\begin{cases} 1 - a = -2 & \cdots ① \\ b - a = 2 & \cdots ② \end{cases}$$

De: ① e ②

$\boldsymbol{a = 3,\ b = 5}$

KUMON J 158a

Divisão de polinômios

(16 pontos)

1. Transforme as seguintes expressões, como no exemplo:

Exemplo

$$\frac{4x-5}{x-2} = 4 + \frac{3}{x-2}$$

$$\begin{array}{r|l} 4x-5 & x-2 \\ \hline 4x-8 & 4 \\ \hline 3 & \end{array}$$

(1) $$\frac{2x-1}{x-2} = \frac{2(x-2)+3}{x-2}$$
$$= \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{3}{x-2}$$
$$= \mathbf{2 + \frac{3}{x-2}}$$

(2) $$\frac{-2x+1}{x+3} = \frac{-2(x+3)+7}{x+3}$$
$$= \frac{-2(x+3)}{x+3} + \frac{7}{x+3}$$
$$= \mathbf{-2 + \frac{7}{x+3}}$$

(3) $$\frac{4x+5}{2x-1} = \frac{2(2x-1)+7}{2x-1}$$
$$= \frac{2(2x-1)}{2x-1} + \frac{7}{2x-1}$$
$$= \mathbf{2 + \frac{7}{2x-1}}$$

Nota: Você pode resolver de uma outra maneira:

$$\frac{4x-5}{x-2} = \frac{4(x-2)+3}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x-2} + \frac{3}{x-2} = 4 + \frac{3}{x-2}$$

J 158b

2. Transforme as seguintes expressões, como no exemplo.

Exemplo

$$\frac{x^2-3x+3}{x-1} = x-2+\frac{1}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-3x+3 & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-x & x-2 \\ \cline{1-1} -2x+3 & \\ -2x+2 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

(1) $\dfrac{x^2-x+4}{x-2} = \dfrac{(x+1)(x-2)+6}{x-2}$

$$= \boldsymbol{x+1+\frac{6}{x-2}}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-x+4 & x-2 \\ \cline{2-2} x^2-2x & x+1 \\ \cline{1-1} x+4 & \\ x-2 & \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

(2) $\dfrac{2x^2-x+1}{x+1} = \dfrac{(x+1)(2x-3)+4}{x+1}$

$$= \boldsymbol{2x-3+\frac{4}{x+1}}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} 2x^2+2x & 2x-3 \\ \cline{1-1} -3x+1 & \\ -3x-3 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

(3) $\dfrac{2x^2-3x+2}{2x+1} = \dfrac{(2x+1)(x-2)+4}{2x+1}$

$$= \boldsymbol{x-2+\frac{4}{2x+1}}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x+2 & 2x+1 \\ \cline{2-2} 2x^2+x & x-2 \\ \cline{1-1} -4x+2 & \\ -4x-2 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

J 159a Divisão de polinômios

(33 pontos)

1. Calcule as seguintes expressões:

Exemplo

$$\frac{a-4}{a-5}-\frac{a-5}{a-6}=\left(1+\frac{1}{a-5}\right)-\left(1+\frac{1}{a-6}\right)$$

$$=\frac{1}{a-5}-\frac{1}{a-6}=-\frac{1}{(a-5)(a-6)}$$

Reduzindo a um único numerador, a solução pode ficar mais simples, "facilitando" cálculos posteriores.

(1) $\dfrac{x-8}{x-4}+\dfrac{x-5}{x-7}-2$

$$=\frac{(x-4)-4}{x-4}+\frac{(x-7)+2}{x-7}-2$$

$$=\left(1+\frac{-4}{x-4}\right)+\left(1+\frac{2}{x-7}\right)-2$$

$$=\frac{-4}{x-4}+\frac{2}{x-7}$$

$$=\frac{-4(x-7)+2(x-4)}{(x-4)(x-7)}$$

$$=\frac{\boldsymbol{-2x+20}}{\boldsymbol{(x-4)(x-7)}}$$

$$\left[=-\frac{\boldsymbol{2(x-10)}}{\boldsymbol{(x-4)(x-7)}}\right]$$

J 159b

(2) $\dfrac{2a}{a-1}-\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{a+1}{a}$

$=\dfrac{2(a-1)+2}{a-1}-\dfrac{(a+1)-2}{a+1}-\dfrac{a+1}{a}$

$=\left(2+\dfrac{2}{a-1}\right)-\left(1+\dfrac{-2}{a+1}\right)-\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$

$=\dfrac{2}{a-1}-\dfrac{-2}{a+1}-\dfrac{1}{a}$

$=\dfrac{2(a+1)+2(a-1)}{(a-1)(a+1)}-\dfrac{1}{a}$

$=\dfrac{4a}{(a-1)(a+1)}-\dfrac{1}{a}$

$=\dfrac{4a^2-(a^2-1)}{a(a-1)(a+1)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3a^2+1}{a(a-1)(a+1)}}$

(3) $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+5}{x+4}+\dfrac{x+6}{x+5}$

$=\dfrac{(x+1)+1}{x+1}-\dfrac{(x+2)+1}{x+2}-\dfrac{(x+4)+1}{x+4}+\dfrac{(x+5)+1}{x+5}$

$=\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)-\left(1+\dfrac{1}{x+4}\right)+\left(1+\dfrac{1}{x+5}\right)$

$=\dfrac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{(x+5)-(x+4)}{(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}-\dfrac{1}{(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{(x^2+9x+20)-(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{6x+18}{(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)}}$

$\left[=\boldsymbol{\dfrac{6(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)}}\right]$

J 160a Divisão de polinômios

(33 pontos)

1. Efetue os seguinte cálculos:

$(x^4+2x^3-12x^2-4)\div(x^2-2x-6)$

[Res.]
$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^3-12x^2-4 & x^2-2x-6 \\ \underline{x^4-2x^3-6x^2} & x^2+4x+2 \\ 4x^3-6x^2-4 & \\ \underline{4x^3-8x^2-24x} & \\ 2x^2+24x-4 & \\ \underline{2x^2-4x-12} & \\ 28x+8 & \end{array}$$

R: quociente $\boldsymbol{x^2+4x+2}$ resto $\boldsymbol{28x+8}$

2. Dividindo-se a expressão $x^3+ax^2-4x-a^2$ por x^2-x-a, o resto é $x+b$.

Determine os valores de a e b.

[Res.]
$$\begin{array}{r|l} x^3+ax^2-4x-a^2 & x^2-x-a \\ \underline{x^3-x^2-ax} & x+(a+1) \\ (a+1)x^2+(a-4)x-a^2 & \\ \underline{(a+1)x^2-(a+1)x-a(a+1)} & \\ (2a-3)x+a & \end{array}$$

Então:

$$\begin{cases} 2a-3=1 & \cdots ① \\ a=b & \cdots ② \end{cases}$$

De: ① e ②,

$\boldsymbol{a=b=2}$

J 160b

3. Dividindo-se a expressão A por x^2+x+1, o quociente é x^2-2 e o resto é $2x+7$. Determine o quociente e o resto da divisão de A por x^2-2x+4.

[Res.] $A=(x^2+x+1)(x^2-2)+2x+7$

$A=x^4-2x^2+x^3-2x+x^2-2+2x+7$

$\boldsymbol{A=x^4+x^3-x^2+5}$

Então:

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3-x^2+5 & x^2-2x+4 \\ \underline{x^4-2x^3+4x^2} & x^2+3x+1 \\ 3x^3-5x^2 & \\ \underline{3x^3-6x^2+12x} & \\ x^2-12x+5 & \\ \underline{x^2-2x+4} & \\ -10x+1 & \end{array}$$

R: quociente $\boldsymbol{x^2+3x+1}$ resto $\boldsymbol{-10x+1}$

J 161a Teorema do Resto

(25 pontos)

Exemplo

Determine o valor de a para que x^2+ax+3 seja divisível por $x-1$.(isto é, o resto deve ser igual a zero).

[Res.]
$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +ax & +3 & x-1 \\ \cline{4-4} x^2 & -x & & x+(a+1) \\ \cline{1-2} & (a+1)x & +3 & \\ & (a+1)x & -a-1 & \\ \cline{2-3} & & a+4 & \end{array}$$

"Para ser divisível por" basta que o resto seja 0 .

Logo, $a+4=0$.

Portanto, $a=-4$.

1. Determine o valor de a para que x^2+2x-a seja divisível por $x+4$.

[Res.]
$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +2x & -a & x+4 \\ \cline{4-4} x^2 & +4x & & x-2 \\ \cline{1-2} & -2x & -a & \\ & -2x & -8 & \\ \cline{2-3} & & -a+8 & \end{array}$$

Logo, $-a+8=0$ portanto $\boldsymbol{a=8}$.

J 161b

2. Determine o valor de a para que $2x^2+7x+a$ seja divisível por $x+1$.

[Res.]
$$\begin{array}{r|l} 2x^2+7x+a & x+1 \\ \hline 2x^2+2x & 2x+5 \\ \hline 5x+a & \\ 5x+5 & \\ \hline a-5 & \end{array}$$

Logo, $a-5=0$ portanto $\boldsymbol{a=5}$.

3. Determine o valor de a para que x^2-ax+6 seja divisível por $x-2$.

[Res.]
$$\begin{array}{r|l} x^2-ax+6 & x-2 \\ \hline x^2-2x & x-a+2 \\ \hline (-a+2)x+6 & \\ (-a+2)x+2a-4 & \\ \hline -2a+10 & \end{array}$$

Logo, $-2a+10=0$ portanto $\boldsymbol{a=5}$.

4. Determine o valor de a para que a divisão de x^2+2x-a por $x+4$ tenha resto 3.

[Res.]
$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-a & x+4 \\ \hline x^2+4x & x-2 \\ \hline -2x-a & \\ -2x-8 & \\ \hline -a+8 & \end{array}$$

Logo, $-a+8=3$ portanto $\boldsymbol{a=5}$.

J 162a Teorema do Resto

(33 pontos)

Importante

- $P(x)$ é usado para representar uma expressão polinomial em termos de x.
- Dividindo $P(x)$ por diferentes termos, obtemos $Q(x)$ como quociente.
- Substituindo um valor de x, como $x = 2$, em $P(x)$, indicamos pela notação $P(2)$.

Responda as seguintes questões quando $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 6$.

Exemplo

Determine o valor de $P(2)$, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$.

[Res.] $P(2) = 2^3 + 2^2 - 5 \times 2 + 6 = \mathbf{8}$ ☜ Para calcular $P(2)$: substituir x por 2 em $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 5x + 6 & x-2 \\ \cline{2-2} x^3 - 2x^2 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{1-1} \quad 3x^2 - 5x & \\ \quad 3x^2 - 6x & \\ \cline{1-1} \quad\quad x + 6 & \\ \quad\quad x - 2 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad 8 & \end{array}$$

R.: quociente $x^2 + 3x + 1$ e resto **8**

▶ O resto da divisão de $\boldsymbol{P(x)}$ por $\boldsymbol{x-2}$ é igual a $\boldsymbol{P(2)}$.

(1) Determine o valor de $P(3)$, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x-3$.

[Res] $P(3) = \boxed{3}^3 + \boxed{3}^2 - 5 \times \boxed{3} + 6 = \mathbf{27}$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 5x + 6 & x-3 \\ \cline{2-2} x^3 - 3x^2 & x^2 + 4x + 7 \\ \cline{1-1} \quad 4x^2 - 5x & \\ \quad 4x^2 - 12x & \\ \cline{1-1} \quad\quad 7x + 6 & \\ \quad\quad 7x - 21 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad 27 & \end{array}$$

R.: quociente $\boldsymbol{x^2 + 4x + 7}$ resto **27**

▶ O resto da divisão de $P(x)$ por $x-3$ é igual a $\boxed{P(\ 3\ )}$.

(2) Determine o valor de $P(-2)$, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x+2$.

[Res.] $P(-2) = (-2)^3+(-2)^2-5\times(-2)+6 = 12$

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-5x+6 & x+2 \\ \hline x^3+2x^2 & x^2-x-3 \\ \hline -x^2-5x & \\ -x^2-2x & \\ \hline -3x+6 & \\ -3x-6 & \\ \hline 12 & \end{array}$$

R.: quociente x^2-x-3 resto **12**

▶ O resto da divisão de $P(x)$ por $\boxed{x+2}$ é igual a $P(-2)$.

(3) Determine o valor de $P(-1)$, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$.

[Res.] $P(-1) = (-1)^3+(-1)^2-5\times(-1)+6 = 11$

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-5x+6 & x+1 \\ \hline x^3+x^2 & x^2-5 \\ \hline -5x+6 & \\ -5x-5 & \\ \hline 11 & \end{array}$$

R.: quociente x^2-5 resto **11**

▶ O resto da divisão de $P(x)$ por $\boxed{x+1}$ é igual a $\boxed{P(\ -1\ )}$.

Pelo exemplo da folha J 162a, $P(x) = (x-2)(x^2+3x+1)+8$, e substituindo $x = 2$ em $P(x)$, temos $P(2) = 8$.

Se uma expressão polinomial da forma $P(x)$ é dividida por $x-a$, podemos expressar a relação com o quociente $Q(x)$, e o resto como: $P(x) = (x-a).Q(x)+R$.

Quando $x = a$, a parte sublinhada da equação acima, transforma-se em $(a-a).Q(x) = 0$. Então, $P(a) = (a-a).Q(x)+R = R$.

Conclusão: $\boxed{\text{Quando } P(x) \text{ é dividido por } x-a \text{, o resto é } P(a)}$.

J 163a Teorema do Resto

(10 pontos)

Teorema do Resto

O resto da divisão de $P(x)$ por $x-a$ é igual a $P(a)$.

1. Determine o resto da divisão de $P(x)$ pelos seguintes polinômios, utilizando o Teorema do Resto:

(1) $P(x)=x^3-7x^2+4x-3$ $\quad x-2$

$P(2)=2^3-7\times2^2+4\times2-3=\mathbf{-15}$

(2) $P(x)=2x^3-x+1$ $\quad x+3$

$P(-3)=2\times(-3)^3-(-3)+1=\mathbf{-50}$

(3) $P(x)=x^3-2ax^2+1$ $\quad x-a-1$

$P(a+1)=(a+1)^3-2a(a+1)^2+1$

$=\mathbf{-a^3-a^2+a+2}$

(4) $P(x)=x^4-2x^2-1$ $\quad 2x-1$

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=\mathbf{-\frac{23}{16}}$

(5) $P(x)=x^5-6x^2+x+6$ $\quad x+2$

$P(-2)=(-2)^5-6\times(-2)^2+(-2)+6=\mathbf{-52}$

J 163b

2. Determine o resto da divisão de $P(x) = 2x^2 - 3x + 4$ pelos seguintes polinômios, utilizando o Teorema do Resto:

(1) $x - 1$

$P(1) = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 4 = \mathbf{3}$

(2) $x + 2$

$P(-2) = 2 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) + 4 = \mathbf{18}$

(3) $3x - 4$

$P\left(\frac{4}{3}\right) = 2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{4}{3}\right) + 4 = \mathbf{\frac{32}{9}}$

(4) $x + a$

$P(-a) = 2 \times (-a)^2 - 3 \times (-a) + 4 = \mathbf{2a^2 + 3a + 4}$

(5) $x - a - 1$

$P(a+1) = 2(a+1)^2 - 3(a+1) + 4 = \mathbf{2a^2 + a + 3}$

J 164a Teorema do Resto

(25 pontos)

1. Determine o valor de a para que $P(x) = 2x^2 + 7x + a$ seja divisível por $x+1$.

   [Res.] $P(-1) = 2\times(-1)^2 + 7\times(-1) + a$

   $= a - 5$

   Para ser divisível, $P(-1) = 0$, então: $a - 5 = 0$

   $$\boldsymbol{a = 5}$$

2. Determine o valor de a para que $P(x) = x^2 - ax + 6$ seja divisível por $x-2$.

   [Res.] $P(2) = 4 - 2a + 6$

   $= -2a + 10$

   Para ser divisível, $P(2) = 0$, então: $-2a + 10 = 0$

   $$\boldsymbol{a = 5}$$

3. Determine o valor de a para que $P(x) = a^2x^3 - 3ax + 1$ seja divisível por $x-2$.

   [Res.] $P(2) = 8a^2 - 6a + 1 = 0$

   Para ser divisível, $P(2) = 0$, então: $(2a-1)(4a-1) = 0$

   $$\boldsymbol{a = \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}}$$

Compare os resultados das questões 1 e 2 acima com os resultados das questões 2 e 3 de **J161b**. Note que são os mesmos exercícios, mas resolvidos utilizando duas maneiras diferentes (o processo longo de divisão em **J161b**, e o *Teorema do Resto* em **J164a**).

O Teorema do resto pode ser aplicado quando o divisor for uma expressão do 1º grau.

Em caso da divisão por uma expressão do 2º grau, é necessário efetuar a divisão, pelo processo longo:

Exemplo

Determine os valores de a, b para que o resto da divisão de x^3+6x^2+ax+b por x^2+3x-2 seja 3.

[Res.]
$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2+ax+b & x^2+3x-2 \\ \hline x^3+3x^2-2x & x+3 \\ \hline 3x^2+(a+2)x+b & \\ 3x^2+9x-6 & \\ \hline (a-7)x+b+6 & \end{array}$$

Logo, o resto é:

$(a-7)x+b+6$

$\begin{cases} a-7=0 & \cdots\cdots ① \\ b+6=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

Para que o resto seja 3, basta que $a-7=0$, $b+6=3$.

De ① e ②,

$\boldsymbol{a=7,\ b=-3}$

4. Determine os valores de a, b para que x^3+2x^2+ax+b seja divisível por x^2+3x-1:

[Res.]
$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2+ax+b & x^2+3x-1 \\ \hline x^3+3x^2-x & x-1 \\ \hline -x^2+(a+1)x+b & \\ -x^2-3x+1 & \\ \hline (a+4)x+b-1 & \end{array}$$

Logo, o resto é: $(a+4)x+b-1$

$\begin{cases} a+4=0 & \cdots\cdots ① \\ b-1=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

De ① e ②: $\boldsymbol{a=-4,\ b=1}$

J 165a Teorema do Resto

(16 pontos)

Exemplo

Faça a relação entre o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x-3)$.

[Res.] Considere $Q(x)$ o quociente e $ax+b$ o resto, então:

$P(x) = (x-2)(x-3)Q(x)+ax+b.$

☜ Quando se divide por uma expressão do 2º grau, o resto da divisão pode ter grau menor ou igual a um. Logo, representa-se o resto como $ax+b$.

1. Faça a relação entre o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x+3)$.

   [Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e $ax+b$ como o resto.

   $P(x) = \boldsymbol{(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b}$

2. Faça a relação entre o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+1)(x+4)$.

   [Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e $ax+b$ como o resto.

   $P(x) = \boldsymbol{(x+1)(x+4)Q(x)+ax+b}$

3. Faça a relação entre o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por x^2-x-2.

   [Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e $ax+b$ como o resto.

   $P(x) = \boldsymbol{(x^2-x-2)Q(x)+ax+b}$

   $\boldsymbol{[=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b]}$

Exemplo

Faça a relação entre o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-1)(x-2)(x-3)$

[Res.] Consideram-se $Q(x)$, o quociente e ax^2+bx+c o resto, então:

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$

Quando se divide por uma equação do 3º grau, o resto da divisão pode ter grau menor ou igual a dois. Logo, representa-se o resto como ax^2+bx+c.

4. Faça a relação entre o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-1)(x-2)(x+3)$.

[Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e ax^2+bx+c como o resto.

$$P(x)=\boldsymbol{(x-1)(x-2)(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c}$$

5. Faça a relação entre o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+1)(x+2)(x+3)$.

[Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e ax^2+bx+c como o resto.

$$P(x)=\boldsymbol{(x+1)(x+2)(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c}$$

6. Faça a relação entre o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por x^3-x-1.

[Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e ax^2+bx+c como o resto.

$$P(x)=\boldsymbol{(x^3-x-1)Q(x)+ax^2+bx+c}$$

Importante

Ao fazer a relação entre o quociente e o resto:

1. O resto da divisão por uma expressão do 2º grau é uma expressão do 1º grau ou é uma constante. Por isso representa-se por $\boldsymbol{ax+b}$.
2. O resto da divisão por uma expressão do 3º grau é uma expressão do 2º grau, do 1º grau ou uma constante. Por isso, representa-se por $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$.

J 166a Teorema do Resto

(33 pontos)

Exemplo

O resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ é 5 e por $x-3$ é 9 .

Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x-3)$.

[Res.] Considere $Q(x)$ o quociente e $ax+b$ o resto.

$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$ ☜ Forme a relação entre o quociente e o resto.

$\begin{cases} P(2)=2a+b=5 & \cdots\cdots ① \\ P(3)=3a+b=9 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ ☜ Do Teorema do Resto.

De ① e ②:

$a=4,\ b=-3$ ☜ Substitua em $ax+b$.

Então o resto é: $4x-3$

1. O resto da divisão de $P(x)$ por $x-2$ é 3 e por $x+3$ é -7.

Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x+3)$.

[Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e $ax+b$ como o resto.

$P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$

$\begin{cases} P(2)=2a+b=3 & \cdots\cdots ① \\ P(-3)=-3a+b=-7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

De ① , $b=-2a+3 \cdots\cdots ③$

Substituindo ③ em ② , $-3a-2a+3=-7$

$a=2$

Substituindo este valor em ③ , $\boldsymbol{b=-1}$

O resto é $\boldsymbol{2x-1}$.

2. Dividindo-se $P(x)$ por $x-3$, o resto é 3, e dividindo-se por $x+4$, o resto é -4.
Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-3)(x+4)$:

[Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e $ax+b$ como o resto.

$$P(x)=(x-3)(x+4)Q(x)+ax+b$$

$$\begin{cases} P(3)=3a+b=3 & \cdots\cdots ① \\ P(-4)=-4a+b=-4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

De ①, $b=-3a+3$ …… ③

Substituindo ③ em ②, $-4a-3a+3=-4$

$$a=1$$

Substituindo este valor em ③, $\boldsymbol{b=0}$

O resto é $\boldsymbol{x}$.

3. O polinômio $P(x)$ é divisível por $x-4$ e dividindo-o por $x+3$, resto é 14.
Determine o resto da divisão de $P(x)$ por x^2-x-12.

(Dica Fatore: x^2-x-12)

[Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e $ax+b$ como o resto.

$$P(x)=(x^2-x-12)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-4)(x+3)Q(x)+ax+b$$
$$\begin{cases} P(4)=4a+b=0 & \cdots\cdots ① \\ P(-3)=-3a+b=14 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

De ①, $b=-4a$ …… ③

Substituindo ③ em ②, $-3a-4a=14$

$$a=-2$$

Substituindo este valor em ③, $b=8$

O resto é $\boldsymbol{-2x+8}$.

J 167a Teorema do Resto

(50 pontos)

1. Os restos das divisões do polinômio $P(x)$ por $x+1$, $x+2$, $x+3$ são, respectivamente 2, 3 e 6.
Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+1)(x+2)(x+3)$.
(O resto de uma divisão por uma expressão de 3º grau é uma expressão do 2º grau para baixo e representa-se como: ax^2+bx+c)

[Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e ax^2+bx+c como o resto.

$$P(x)=(x+1)(x+2)(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c$$

$$\begin{cases} P(-1)=a-b+c=2 & \cdots\cdots ① \\ P(-2)=4a-2b+c=3 & \cdots\cdots ② \\ P(-3)=9a-3b+c=6 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

De ③ − ①,

$8a-2b=4$ ..... ④

De ② − ①,

$3a-b=1$

Portanto, $b=3a-1$ ..... ⑤

Substituindo ⑤ em ④,

$8a-2(3a-1)=4$

$a=1$

Substituindo este valor em ⑤,

$b=2$

Substituindo $a=1$ e $b=2$ em ①,

$c=3$

O resto é $\boldsymbol{x^2+2x+3}$.

J 167b

2. Dividindo-se o polinômio $P(x)$ por $x-1$, o resto é 1 e dividindo-se por, $(x-2), (x-3)$ o resto é 5 .

Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-1)(x-2)(x-3)$.

[Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e ax^2+bx+c como o resto.

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$$

$$\begin{cases} P(1)=a+b+c=1 & \cdots\cdots ① \\ P(2)=4a+2b+c=5 & \cdots\cdots ② \\ P(3)=9a+3b+c=5 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

De ③ − ①,

$8a+2b=4$ $\cdots\cdots ④$

De ② − ①,

$3a+b=4$

Portanto, $b=-3a+4$ $\cdots\cdots ⑤$

Substituindo ⑤ em ④,

$8a+2(-3a+4)=4$

$$a=-2$$

Substituindo este valor em ⑤,

$$b=10$$

Substituindo $a=-2$ e $b=10$ em ①,

$$c=-7$$

O resto é $\mathbf{-2x^2+10x-7.}$

KUMON J 168a

Teorema do Resto

(50 pontos)

1. Determine o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^{10} - 3$ por $x^2 - 1$.

[Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e $ax + b$ como o resto.

$$P(x) = x^{10} - 3 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$$
$$= (x+1)(x-1)Q(x) + ax + b$$

$$\begin{cases} P(1) = 1^{10} - 3 = -2 = a + b & \cdots\cdots ① \\ P(-1) = (-1)^{10} - 3 = -2 = -a + b & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

De ① + ②,

$2b = -4$

$b = -2$

Substituindo este valor em ①,

$a - 2 = -2$

$a = 0$

O resto é **-2.**

J 168b

2. Determine o resto da divisão do polinômio: $P(x) = 32x^5 - 1$ por $4x^2 - 1$.

[Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e $ax + b$ como o resto.

$$P(x) = 32x^5 - 1 = (4x^2 - 1)Q(x) + ax + b$$
$$= (2x + 1)(2x - 1)Q(x) + ax + b$$

$$\begin{cases} P\left(\frac{1}{2}\right) = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1 = 0 = \frac{1}{2}a + b & \cdots\cdots ① \\ P\left(-\frac{1}{2}\right) = 32 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^5 - 1 = -2 = -\frac{1}{2}a + b & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

De ① + ②,

$2b = -2$

$b = -1$

Substituindo este valor em ①,

$\frac{1}{2}a - 1 = 0$

$a = 2$

O resto é $\boldsymbol{2x - 1}$.

J 169a Teorema do Resto

(50 pontos)

Exemplo

Determine o valor de $x^4-x^3-6x^2+9x-4$ quando $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

[Res.]

De $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad 2x-3=\sqrt{5} \quad \cdots ①$

Elevando-se ambos os membros de ① ao quadrado:

$$4x^2-12x+9=5$$
$$4x^2-12x+4=0$$
$$x^2-3x+1=0 \quad \cdots ②$$
$$P(x)=x^4-x^3-6x^2+9x-4$$

Dividindo-se $P(x)$ por x^2-3x+1, temos:

Quociente x^2+2x-1

Resto $\boxed{4x-3}$

Temos então:

$$\begin{array}{r|l} x^4-x^3-6x^2+9x-4 & x^2-3x+1 \\ \cline{2-2} x^4-3x^3+x^2 & x^2+2x-1 \\ \cline{1-1} 2x^3-7x^2+9x & \\ 2x^3-6x^2+2x & \\ \cline{1-1} -x^2+7x-4 & \\ -x^2+3x-1 & \\ \cline{1-1} \boxed{4x-3} & \end{array}$$

$P(x)=(x^2-3x+1)(x^2+2x-1)+\boxed{4x-3} \quad \cdots ③$

De ② sabemos que $x^2-3x+1=0$.

Então: $P(x)=0\times(x^2+2x-1)+\boxed{4x-3}$

$$=\boxed{4x-3} \quad \cdots ④$$

Substituindo-se $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ em ④, tem-se, o valor procurado Portanto:

$$P\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=4\times\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-3=\mathbf{3+2\sqrt{5}}$$

R.: $\boxed{4x-3}$ $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ $3+2\sqrt{5}$

J 169b

1. Determine o valor de $x^4 - x^2 + 6x - 4$ quando $x = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$.

[Res.] De $x = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$,

$2x - 1 = \sqrt{3}\,i$ ..... ①

Elevando-se ambos os membros de ① ao quadrado:

$4x^2 - 4x + 1 = -3$

$4x^2 - 4x + 4 = 0$

$x^2 - x + 1 = 0$ ..... ②

$P(x) = x^4 - x^2 + 6x - 4$

Dividindo-se $P(x)$ por $x^2 - x + 1$

Quociente $x^2 + x - 1$

Resto $4x - 3$

Temos então: $P(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1) + 4x - 3$ ..... ③

De ② sabemos que $x^2 - x + 1 = 0$

Logo $P(x) = 0 \times (x^2 + x - 1) + 4x - 3$

$= 4x - 3$ ..... ④

Substituindo $x = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ em ④, tem-se o valor procurado.

Portanto $P\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right) = 4 \times \left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right) - 3 = \mathbf{-1 + 2\sqrt{3}\,i}$

J 170a Teorema do Resto

(20 pontos)

1. Determine o valor de a que satisfaça as seguintes condições:

(1) x^2-2x+a seja divisível por $x+2$.

Sendo $P(x)=x^2-2x+a$

$$P(-2)=4+4+a=0$$

$$\boldsymbol{a=-8}$$

(2) x^3-3x^2+4x+a seja divisível por $x-2$

Sendo $P(x)=x^3-3x^2+4x+a$

$$P(2)=8-12+8+a=0$$

$$\boldsymbol{a=-4}$$

(3) O resto da divisão de x^3+ax^2+3x+1 por $x+3$ seja 1.

Sendo $P(x)=x^3+ax^2+3x+1$

$$P(-3)=-27+9a-9+1=1$$

$$9a=36$$

$$\boldsymbol{a=4}$$

(4) O resto da divisão de $3x^3-8x^2+ax-4$ por $3x-2$ seja -2.

Sendo $P(x)=3x^3-8x^2+ax-4$

$$P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{9}-\frac{32}{9}+\frac{2}{3}a-4=-2$$

$$\frac{2}{3}a=\frac{14}{3}$$

$$\boldsymbol{a=7}$$

J 170b

2. Dividindo-se $P(x)$ por $x-1$ o resto é 3, por $x+2$ o resto é 6 e por $x-3$ o resto é 11. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-1)(x+2)(x-3)$.

[Res.] Considerando $Q(x)$ como quociente e ax^2+bx+c como o resto.

$$P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$$

$$\begin{cases} P(1)=a+b+c=3 & \cdots\cdots ① \\ P(-2)=4a-2b+c=6 & \cdots\cdots ② \\ P(3)=9a+3b+c=11 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

De ③ − ①,

$8a+2b=8$ ……④

De ② − ①,

$a-b=1$

Portanto, $b=a-1$ ……⑤

Substituindo ⑤ em ④,

$8a+2(a-1)=8$

$$\boldsymbol{a=1}$$

Substituindo este valor em ⑤,

$$\boldsymbol{b=0}$$

Substituindo $a=1$ e $b=0$ em ①,

$$\boldsymbol{c=2}$$

O resto é $\boldsymbol{x^2+2}$.

J 171a Teorema dos fatores

(16 pontos)

Resolva as seguintes equações:

Exemplo

$x^3-x^2+x-1=0$

[Res.] $x^2(x-1)+(x-1)=0$

$(x-1)(x^2+1)=0$

$x=1$ ou $x^2=-1$ ⟵ $x-1=0$ ou $x^2+1=0$

Portanto: $x=1, \pm i$ ⟵ De $x^2=-1$, $x=\pm i$

(1) $x^3-2x^2+x-2=0$

[Res.] $x^2(x-2)+(x-2)=0$

$(x-2)(x^2+1)=0$

$\boldsymbol{x=2, \pm i}$

(2) $2x^3-5x^2+5x-2=0$

[Res.] $2(x^3-1)-5x(x-1)=0$

$2(x-1)(x^2+x+1)-5x(x-1)=0$

$(x-1)(2x^2-3x+2)=0$

$\boldsymbol{x=1, \dfrac{3\pm\sqrt{7}i}{4}}$

J 171b

(3) $x^3+1=0$

[Res.] $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$$x=-1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

Nos exercícios 3, 4 e 5 relembrar as fórmulas de fatoração da folha J 47a.

(4) $x^3-1=0$

[Res.] $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$$x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(5) $x^3-8=0$

[Res.] $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$$x=2,\ -1\pm\sqrt{3}i$$

(6) $x^4-1=0$

[Res.] $(x^2+1)(x^2-1)=0$

$$x=\pm i,\ \pm 1$$

J 172a Teorema dos fatores

(25 pontos)

Como $P(x)$ é divisível por $x-a$ quando $P(a)=0$, conclui-se o seguinte teorema.

Teorema dos fatores

$P(x)$ é divisível por $x-a \Leftrightarrow P(a)=0$.

Fatore $P(x)$ utilizando o Teorema dos fatores:

Exemplo

$P(x)=x^3-7x+6$

[Res.] $P(1)=1^3-7\times1+6=0$ ☜ Substitua os divisores do termo constante $6(\pm1, \pm2, \pm3, \pm6)$.

$P(x)$ é divisível por $x-1$. ☜ Como $P(1)=0$.

Portanto:

$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x-2)(x+3)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 \quad -7x+6 & x-1 \\ \hline x^3-x^2 & x^2+x-6 \\ \hline \quad x^2-7x & \\ \quad x^2-x & \\ \hline \quad -6x+6 & \\ \quad -6x+6 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

(1) $P(x)=x^3-3x-2$

[Res.] $P(-1)=0$

$P(x)=(x+1)(x^2-x-2)$

$=\boldsymbol{(x+1)^2(x-2)}$

$$\begin{array}{r|l} x^3 \quad -3x-2 & x+1 \\ \hline x^3+x^2 & x^2-x-2 \\ \hline \quad -x^2-3x & \\ \quad -x^2-x & \\ \hline \quad -2x-2 & \\ \quad -2x-2 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

Outra solução:

$P(2)=0$

$P(x)=(x-2)(x+1)^2$

J 172b

(2) $P(x)=x^3+2x^2-3$

[Res.] $P(1)=0$

$$\boldsymbol{P(x)=(x-1)(x^2+3x+3)}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2 \quad -3 & x-1 \\ \hline x^3-x^2 & x^2+3x+3 \\ \hline 3x^2 & \\ 3x^2-3x & \\ \hline 3x-3 & \\ 3x-3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

(3) $P(x)=x^3+6x^2+11x+6$

[Res.] $P(-1)=0$

$$P(x)=(x+1)(x^2+5x+6)$$
$$\boldsymbol{=(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2+11x+6 & x+1 \\ \hline x^3+x^2 & x^2+5x+6 \\ \hline 5x^2+11x & \\ 5x^2+5x & \\ \hline 6x+6 & \\ 6x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

(4) $P(x)=x^3+3x^2-x-3$

[Res.] $P(1)=0$

$$P(x)=(x-1)(x^2+4x+3)$$
$$\boldsymbol{=(x-1)(x+1)(x+3)}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-x-3 & x-1 \\ \hline x^3-x^2 & x^2+4x+3 \\ \hline 4x^2-x & \\ 4x^2-4x & \\ \hline 3x-3 & \\ 3x-3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Teorema dos fatores

(25 pontos)

Fatore as seguintes expressões:

Exemplo

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 71x - 10$

[Res.] $P(-10) = (-10)^3 + 3\times(-10)^2 - 71\times(-10) - 10$ ☜ Substitua os divisores do termo constante -10 ($\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$).

$= 0$

$P(x)$ é divisível por $x+10$. ☜ Como $P(-10)=0$

Portanto:

$P(x) = (x+10)(x^2-7x-1)$

▶Não é necessário substituir por números que não sejam divisores de 10.

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-71x-10 & x+10 \\ \cline{2-2} x^3+10x^2 & x^2-7x-1 \\ \cline{1-1} -7x^2-71x & \\ -7x^2-70x & \\ \cline{1-1} -x-10 & \\ -x-10 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

(1) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$

[Res.] $P(5) = 0$

$$\boldsymbol{P(x) = (x-5)(x^2+x+1)}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2-4x-5 & x-5 \\ \cline{2-2} x^3-5x^2 & x^2+x+1 \\ \cline{1-1} x^2-4x & \\ x^2-5x & \\ \cline{1-1} x-5 & \\ x-5 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

(2) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x - 6$

[Res.] $P(6) = 0$

$$\boldsymbol{P(x) = (x-6)(x^2-x+1)}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-7x^2+7x-6 & x-6 \\ \cline{2-2} x^3-6x^2 & x^2-x+1 \\ \cline{1-1} -x^2+7x & \\ -x^2+6x & \\ \cline{1-1} x-6 & \\ x-6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

J 173b

(3) $P(x)=x^3+4x^2-8$

[Res.] $P(-2)=0$

$$\boldsymbol{P(x)=(x+2)(x^2+2x-4)}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2 \quad -8 & x+2 \\ \underline{x^3+2x^2} & x^2+2x\ -4 \\ \quad 2x^2 & \\ \quad \underline{2x^2+4x} & \\ \quad\quad -4x-8 & \\ \quad\quad \underline{-4x-8} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

(4) $P(x)=x^3-4x+15$

[Res.] $P(-3)=0$

$$\boldsymbol{P(x)=(x+3)(x^2-3x+5)}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 \quad -4x+15 & x+3 \\ \underline{x^3+3x^2} & x^2-3x\ +5 \\ \quad -3x^2-4x & \\ \quad \underline{-3x^2-9x} & \\ \quad\quad 5x+15 & \\ \quad\quad \underline{5x+15} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

J 174a Teorema dos fatores

(25 pontos)

Fatore as seguintes expressões:

Exemplo

$P(x)=2x^3-3x^2-x-10$ ☜ Esta expressão pode ser fatorada como $(2x-\bullet)(x^2+\blacktriangle x+\blacksquare)$.

[Res.] $P\left(\frac{5}{2}\right)=2\times\left(\frac{5}{2}\right)^3-3\times\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{2}-10$

$=0$

☜ Substitua também $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$.

Portanto:

$P(x)=(2x-5)(x^2+x+2)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-3x^2-x-10 & 2x-5 \\ \underline{2x^3-5x^2} & x^2+x+2 \\ 2x^2-x & \\ \underline{2x^2-5x} & \\ 4x-10 & \\ \underline{4x-10} & \\ 0 & \end{array}$$

(1) $P(x)=2x^3+x^2+x-1$

[Res.] $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$$\boldsymbol{P(x)=(2x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2+x-1 & 2x-1 \\ \underline{2x^3-x^2} & x^2+x+1 \\ 2x^2+x & \\ \underline{2x^2-x} & \\ 2x-1 & \\ \underline{2x-1} & \\ 0 & \end{array}$$

(2) $P(x)=2x^3-x^2+9$

[Res.] $P\left(-\frac{3}{2}\right)=0$

$$\boldsymbol{P(x)=(2x+3)(x^2-2x+3)}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-x^2+9 & 2x+3 \\ \underline{2x^3+3x^2} & x^2-2x+3 \\ -4x^2 & \\ \underline{-4x^2-6x} & \\ 6x+9 & \\ \underline{6x+9} & \\ 0 & \end{array}$$

J 174b

(3) $P(x)=2x^3+3x^2+2x-2$

[Res.] $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$$\boldsymbol{P(x)=(2x-1)(x^2+2x+2)}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+3x^2+2x-2 & 2x-1 \\ \cline{2-2} 2x^3-\ x^2 & x^2+2x\ +2 \\ \cline{1-1} \quad 4x^2+2x & \\ \quad 4x^2-2x & \\ \cline{1-1} \quad\quad 4x-2 & \\ \quad\quad 4x-2 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

(4) $P(x)=3x^3-4x^2-7x-2$

[Res.] $P\left(-\frac{2}{3}\right)=0$

$$\boldsymbol{P(x)=(3x+2)(x^2-2x-1)}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-4x^2-7x-2 & 3x+2 \\ \cline{2-2} 3x^3+2x^2 & x^2-2x\ -1 \\ \cline{1-1} \quad -6x^2-7x & \\ \quad -6x^2-4x & \\ \cline{1-1} \quad\quad -3x-2 & \\ \quad\quad -3x-2 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

J 175a Teorema dos fatores

(33 pontos)

Resolva as seguintes equações:

Exemplo

$3x^3+7x^2-4=0$

[Res.] Representa-se como: $P(x)=3x^3+7x^2-4$

De $P(-1)=0$

$P(x)=(x+1)(3x^2+4x-4)$ ⟵ $P(x)$ é divisível por $x+1$.

$=(x+1)(x+2)(3x-2)$

De: $(x+1)(x+2)(3x-2)=0$

$x=-1,\ -2,\ \frac{2}{3}$

(1) $3x^3-2x^2-12x+8=0$

[Res.] Sendo $P(x)=3x^3-2x^2-12x+8$

De $P(2)=0$

$P(x)=(x-2)(3x^2+4x-4)$

$=(x-2)(x+2)(3x-2)$

De $(x-2)(x+2)(3x-2)=0$

$\boldsymbol{x=2,\ -2,\ \frac{2}{3}}$

J 175b

(2) $12x^3+4x^2-3x-1=0$

[Res.] Sendo $P(x)=12x^3+4x^2-3x-1$

De $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$$P(x)=(2x-1)(6x^2+5x+1)$$
$$=(2x-1)(2x+1)(3x+1)$$

De $(2x-1)(2x+1)(3x+1)=0$

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}}$$

(3) $4x^3-4x^2-7x+6=0$

[Res.] Sendo $P(x)=4x^3-4x^2-7x+6$

De $P\left(\frac{3}{2}\right)=0$

$$P(x)=(2x-3)(2x^2+x-2)$$

De $(2x-3)(2x^2+x-2)=0$

$$\boldsymbol{x=\frac{3}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}}$$

J 176a Teorema dos fatores

(33 pontos)

Resolva as seguintes equações:

(1) $3x^3+5x^2-4x-4=0$

[Res.] Sendo $P(x)=3x^3+5x^2-4x-4$

De $P(1)=0$

$P(x)=(x-1)(3x^2+8x+4)$

$=(x-1)(x+2)(3x+2)$

De $(x-1)(x+2)(3x+2)=0$

$$\boldsymbol{x=1,\ -2,\ -\frac{2}{3}}$$

(2) $2x^3-x^2-15x+18=0$

[Res.] Sendo $P(x)=2x^3-x^2-15x+18$

De $P(2)=0$

$P(x)=(x-2)(2x^2+3x-9)$

$=(x-2)(x+3)(2x-3)$

De $(x-2)(x+3)(2x-3)=0$

$$\boldsymbol{x=2,\ -3,\ \frac{3}{2}}$$

Exemplo

$x^4+x^3-2x^2-x+1=0$

[Res.] Representa-se como: $P(x)=x^4+x^3-2x^2-x+1$

De $P(1)=0$

$P(x)=(x-1)(x^3+2x^2-1)$ …①

Representa-se ainda como: $Q(x)=x^3+2x^2-1$

De $Q(-1)=0$,

$Q(x)=(x+1)(x^2+x-1)$ …②

De ① e ②,

$P(x)=(x-1)Q(x)$

$=(x-1)(x+1)(x^2+x-1)$

$(x-1)(x+1)(x^2+x-1)=0$

$x=1,\ -1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Como não é possível fatorar x^3+2x^2-1 nessa forma, utilizar novamente o Teorema dos fatores.

(1) $x^4+x^3-8x^2+2x+4=0$

[Res.] Sendo $P(x)=x^4+x^3-8x^2+2x+4$

De $P(1)=0$

$P(x)=(x-1)(x^3+2x^2-6x-4)$ …①

Sendo $Q(x)=x^3+2x^2-6x-4$

De $Q(2)=0$

$Q(x)=(x-2)(x^2+4x+2)$ …②

De ① e ②,

$P(x)=(x-1)Q(x)$

$=(x-1)(x-2)(x^2+4x+2)$

De $(x-1)(x-2)(x^2+4x+2)=0$

$\boldsymbol{x=1,\ 2,\ -2\pm\sqrt{2}}$

J 177a Teorema dos fatores

(50 pontos)

Resolva as seguintes equações:

Exemplo

$(x-2)(x-5)(x-7)=8\cdot5\cdot3$

[Res.] Representa-se como: $P(x)=(x-2)(x-5)(x-7)-8\cdot5\cdot3$ ⋯①

De $P(10)=8\cdot5\cdot3-8\cdot5\cdot3=0$

Portanto, $x-10$ é fator de $P(x)$.

Temos então,

$P(x)=x^3-14x^2+59x-70-120$ ☜ Desenvolver ①.

$=x^3-14x^2+59x-190$

$=(x-10)(x^2-4x+19)$

De $(x-10)(x^2-4x+19)=0$

$x=10,\ 2\pm\sqrt{15}\,i$

(1) $x(x+1)(x+2)=3\cdot4\cdot5$

[Res.] Sendo $P(x)=x(x+1)(x+2)-3\cdot4\cdot5$

De $P(3)=3\cdot4\cdot5-3\cdot4\cdot5=0$

$P(x)=x^3+3x^2+2x-60$

$=(x-3)(x^2+6x+20)$

De $(x-3)(x^2+6x+20)=0$

$\boldsymbol{x=3,\ -3\pm\sqrt{11}\,i}$

Exemplo

Seja 3, uma das raízes de $x^3-6x^2+ax-6=0$

Determine o valor de a e as demais raízes:

[Res.] Consideramos $P(x)=x^3-6x^2+ax-6$

De $P(3)=3a-33=0$ ☜ $x=3$ é uma das raízes.

$a=11$

Neste caso:

$P(x)=x^3-6x^2+11x-6$ ☜ Substitua $a=11$.

$=(x-3)(x^2-3x+2)$ ☜ Como $P(3)=0$, $x-3$ é um fator de $P(x)$.

$=(x-3)(x-2)(x-1)$

De $(x-3)(x-2)(x-1)=0$,

$x=3,\ 2,\ 1$

Logo as demais raízes são: $x=2,\ 1$

R.: $a=11$ e as outras raízes são $x=2,\ 1$

2. Seja 1, uma das raízes de $x^3+ax^2+6x-2=0$. Determine o valor de a e as demais raízes:

[Res.] Sendo $P(x)=x^3+ax^2+6x-2$

De $P(1)=a+5=0$

$a=-5$

$P(x)=x^3-5x^2+6x-2$

$=(x-1)(x^2-4x+2)=0$

$x=1,\ 2\pm\sqrt{2}$

R.: $a=-5$ e as outras raízes são $x=2\pm\sqrt{2}$

J 178a Teorema dos fatores

(33 pontos)

1. Sejam 3 e -2, duas das raízes de $x^4+ax^3+ax^2+11x+b=0$.

(1) Determine os valores de a, b.

[Res.] Sendo $P(x)=x^4+ax^3+ax^2+11x+b$

De $P(3)=0$ $\quad 36a+b=-114 \quad \cdots\cdots ①$

De $P(-2)=0$ $\quad 4a-b=-6 \quad \cdots\cdots ②$

De ① + ②,

$$40a=-120$$

$$a=-3$$

Substituindo este valor em ②,

$$4(-3)-b=-6$$

$$b=-6$$

R.: $\boldsymbol{a=-3,\ b=-6}$

(2) Determine as demais raízes.

[Res.] Substituindo $a=-3$ e $b=-6$ na equação original.

$$P(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6$$

$$=(x-3)(x+2)(x^2-2x+1)$$

$$=(x-3)(x+2)(x-1)^2$$

De $(x-3)(x+2)(x-1)^2=0$

$$x=3,\ -2,\ 1$$

R.: A outra raiz é $\boldsymbol{x=1}$

J 178b

2. Sejam 1 e 3, duas das raízes de $x^4+ax^3+(a+3)x^2+16x+b=0$.
   Determine os valores de a, b e as demais raízes.

[Res.] Sendo $P(x)=x^4+ax^3+(a+3)x^2+16x+b$

De $P(1)=0$ $\quad 2a+b=-20 \quad \cdots\cdots ①$

De $P(3)=0$ $\quad 36a+b=-156 \quad \cdots\cdots ②$

De ① − ②,

$$-34a=136$$

$$a=-4$$

Substituindo este valor em ①,

$$2(-4)+b=-20$$

$$b=-12$$

Substituindo os valores de a e b na equação original.

$$P(x)=x^4-4x^3-x^2+16x-12$$

$$=(x-1)(x-3)(x^2-4)$$

$$=(x-1)(x-3)(x+2)(x-2)$$

De $(x-1)(x-3)(x+2)(x-2)=0$

$$x=1,3,\pm 2$$

R.: $\boldsymbol{a=-4,\ b=-12,}$ as outras raízes são $\boldsymbol{x=\pm 2}$

J 179a Teorema dos fatores

(33 pontos)

1. Resolva a equação $2x^4-3x^3-x^2-3x+2=0$ seguindo as orientações.

(1) Divida ambos os membros por $x^2\,(x\neq 0)$, obtendo:

$$2x^2-3x-1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

[Res.] $2x^2-3x-1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}$

$$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1$$

$$=2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1$$

$$=2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-\boxed{5}$$

☜ Substitua $x+\frac{1}{x}$ por t.

$$=2t^2-3t-\boxed{5}$$

(2) Determine o valor de t e depois o de x.

[Res.] $2t^2-3t-\boxed{5}$

$=(2t-\boxed{5})(t+\boxed{1})=0$

$t=\frac{\boxed{5}}{2},\ \boxed{-1}$

(i) Quando $x+\frac{1}{x}=\frac{\boxed{5}}{2}$

Multiplique ambos os membros por $2x$.

$2x^2-5x+2=0$

$(2x-1)(x-2)=0$

(ii) Quando $x+\frac{1}{x}=\boxed{-1}$

Multiplique ambos os membros por x.

$x^2+x+1=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

R.: $x=\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

J 179b

2. Resolva a equação $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$.

$\left(\text{Considere: } x + \frac{1}{x} = t\right)$

[Res.] Divida ambos os membros por x^2 $(x \neq 0)$.

$$= 2x^2 - x - 6 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 10$$

$$= 2t^2 - t - 10$$

$$= (t+2)(2t-5) = 0$$

$$\boldsymbol{t = -2,\ \frac{5}{2}}$$

(i) Quando $x + \frac{1}{x} = -2$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x+1)^2 = 0$$
$$x = -1$$

(ii) Quando $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$(x-2)(2x-1) = 0$$
$$x = 2,\ \frac{1}{2}$$

R.: $\boldsymbol{x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2}$

J 180a Teorema dos fatores

(25 pontos)

1. Fatore utilizando o Teorema dos fatores:

(1) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

[Res.] Como $P(-1) = 0$

$$P(x) = (x+1)(x^2+5x+6)$$
$$= \boldsymbol{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2+11x+6 & x+1 \\ \hline x^3+\ x^2 & x^2+5x\ +6 \\ \hline 5x^2+11x & \\ 5x^2+\ 5x & \\ \hline 6x+6 & \\ 6x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

(2) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$

[Res.] Como $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$$\boldsymbol{P(x) = (2x-1)(x^2+2x+2)}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+3x^2+2x-2 & 2x-1 \\ \hline 2x^3-\ x^2 & x^2+2x\ +2 \\ \hline 4x^2+2x & \\ 4x^2-2x & \\ \hline 4x-2 & \\ 4x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

J 180b

2. Resolva as seguintes equações:

(1) $x^3-2x^2+3x-6=0$

[Res.] Sendo $P(x)=x^3-2x^2+3x-6$

De $P(2)=0$

$P(x)=(x-2)(x^2+3)$

De $(x-2)(x^2+3)=0$

$\boldsymbol{x=2,\ \pm\sqrt{3}\,i}$

(2) $x^4-3x^3+3x^2+x-6=0$

[Res.] Sendo $P(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$

De $P(-1)=0$

$P(x)=(x+1)(x^3-4x^2+7x-6)\cdots\cdots①$

Sendo $Q(x)=x^3-4x^2+7x-6$

De $Q(2)=0$

$Q(x)=(x-2)(x^2-2x+3)\qquad\cdots\cdots②$

De ①e②,

$P(x)=(x+1)Q(x)$

$=(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=0$

$\boldsymbol{x=-1,\ 2,\ 1\pm\sqrt{2}\,i}$

J 181a Identidade e igualdade

(50 pontos)

1. Determine os valores de a, b e c para que satisfaçam sempre as seguintes igualdades, qualquer que seja o valor de x.

Exemplo

$(ax+b)(x+1)=3x^2+5x+2$

[Res.] $ax^2+(a+b)x+b=3x^2+5x+2$ ☜ Desenvolver o 1º membro ordenando em função de x.

Comparando-se os seguintes coeficientes de ambos os membros,

$$\begin{cases} a=3 & \cdots ① \\ a+b=5 & \cdots ② \\ b=2 & \cdots ③ \end{cases}$$

☜ Comparando-se os coeficientes de x^2.

☜ Comparando-se os coeficientes de x.

☜ Comparando-se os termos constantes.

De ①, ② e ③,

$a=3$, $b=2$

(1) $(ax+2b)(x-1)=2x^2-x-1$

[Res.] $ax^2+(-a+2b)x-2b=2x^2-x-1$

Comparando-se os seguintes coeficientes de ambos os membros,

$$\begin{cases} a=2 & \cdots ① \\ -a+2b=-1 & \cdots ② \\ -2b=-1 & \cdots ③ \end{cases}$$

De ①, ② e ③,

$$\boldsymbol{a=2},\ \boldsymbol{b=\frac{1}{2}}$$

J 181b

(2) $x^3-6x^2+15x-7=(x+a)^3+bx+c$

[Res.] $x^3-6x^2+15x-7=x^3+3ax^2+(3a^2+b)x+(a^3+c)$

Comparando-se os seguintes coeficientes de ambos os membros,

$$\begin{cases} 3a=-6 & \cdots ① \\ 3a^2+b=15 & \cdots ② \\ a^3+c=-7 & \cdots ③ \end{cases}$$

De ①, $a=-2$

Substituindo $a=-2$ em ②,

$3(-2)^2+b=15$

$b=3$

Substituindo $a=-2$ em ③,

$(-2)^3+c=-7$

$c=1$

Portanto $\boldsymbol{a=-2,\ b=3,\ c=1}$

---

① Do exemplo da folha J181a, quando $a=3$, $b=2$,

$(3x+2)(x+1)=3x^2+5x+2$

Substituindo em ambos os membros por exemplo, $x=4$, temos:

1º membro: $=(3\cdot4+2)(4+1)=70.$

2º membro: $=3\cdot4^2+5\cdot4+2=70.$

Satisfazendo a condição do 1º membro = 2º membro.

Dessa forma, todas as igualdades que são satisfeitas, independente do valor substituído para as variáveis, são chamadas de identidade.

② Para que a equação do 2º grau $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ seja uma identidade é necessário que $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$.

(Na equação do 3º grau também se estabelece a mesma relação.)

J 182a Identidade e igualdade

(33 pontos)

Determine os valores de a, b, c para que as seguintes expressões tornem-se uma identidade.

Exemplo

$3x^2+4x+a=b(x+c)^2$

[Res.] $3x^2+4x+a=bx^2+2bcx+bc^2$ ← Desenvolver o 2º membro ordenando em função de x.

$$\begin{cases} b=3 & \cdots ① \\ 2bc=4 & \cdots ② \\ bc^2=a & \cdots ③ \end{cases}$$

De ①, ② e ③:

$$a=\frac{4}{3},\ b=3,\ c=\frac{2}{3}$$

(1) $x^3+ax+2=(x+1)(x^2+bx+c)$

[Res.] $x^3+ax+2=x^3+(b+1)x^2+(b+c)x+c$

$$\begin{cases} b+1=0 & \cdots ① \\ b+c=a & \cdots ② \\ c=2 & \cdots ③ \end{cases}$$

De ①, ② e ③,

$$\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=2}$$

O método de resolução mostrado em **J181a** e **J182a** é chamado de Método de Comparação dos Coeficientes.

Exemplo

$x^2 = a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$

[Res.] Quando $x=1$, $1=c$ $\cdots$① ☜ Substitua em ambos os membros $x=1$.

Quando $x=2$, $4=b+c$ $\cdots$② ☜ Substitua em ambos os membros $x=2$.

Quando $x=3$, $9=2a+2b+c$ $\cdots$③ ☜ Substitua em ambos os membros $x=3$.

De ①, ② e ③,

$a=1$, $b=3$, $c=1$

(Este método é chamado de método de substituição do valor numérico.)

(2) $a(x-1)^2+b(x+1)^2+c=x^2$

[Res.] Quando $x=1$, $4b+c=1$ $\cdots$①

Quando $x=-1$, $4a+c=1$ $\cdots$②

Quando $x=0$, $a+b+c=0$ $\cdots$③

De ①, ② e ③,

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2},\ c=-1}$$

(3) $ax^2+bx+c=0$ $(x=0,\ x=1,\ x=-1)$

Quando $x=0$, $c=0$ $\cdots$①

[Res.] Quando $x=1$, $a+b+c=0$ $\cdots$②

Quando $x=-1$, $a-b+c=0$ $\cdots$③

De ①, ② e ③,

$$\boldsymbol{a=0,\ b=0,\ c=0}$$

Do resultado de (3), quando $ax^2+bx+c=0$ for uma identidade em função de x, temos que $a=0$, $b=0$, $c=0$.

J 183a Identidade e igualdade

(33 pontos)

Determine os valores de a, b e c para que a seguinte expressão seja uma identidade.

(1) $(ax+b)(x+c) = 3x^2+5x+2$ (Há 2 soluções)

[Res.] Desenvolvendo o primeiro membro e ordenando em função de x.

$$ax^2+(ac+b)x+bc = 3x^2+5x+2$$

Comparando-se os seguintes coeficientes de ambos os membros,

$$\begin{cases} a = 3 & \cdots\cdots ① \\ ac+b = 5 & \cdots\cdots ② \\ bc = 2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

Substituindo ① em ②,

$$3c+b = 5$$

$$b = 5-3c \quad \cdots\cdots ④$$

Substituindo ④ em ③,

$$(5-3c)\cdot c = 2$$

$$3c^2-5c+2 = 0$$

$$(3c-2)(c-1) = 0$$

$$\boldsymbol{c = \frac{2}{3},\ 1}$$

(i) Quando $c = \frac{2}{3}$

$$b = 5-3\cdot\frac{2}{3} = 3$$

(ii) Quando $c = 1$

$$b = 5-3.1 = 2$$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{a = 3} \\ \boldsymbol{b = 3} \\ \boldsymbol{c = \frac{2}{3}} \end{cases}$ ou $\begin{cases} \boldsymbol{a = 3} \\ \boldsymbol{b = 2} \\ \boldsymbol{c = 1} \end{cases}$

(2) $ax^3-x^2-4x+5=(2x-1)(bx^2+cx-5)$

[Res.] Desenvolvendo o segundo membro e ordenando em função de x.

$$ax^3-x^2-4x+5=2bx^3+(2c-b)x^2-(10+c)x+5$$

Comparando-se os seguintes coeficientes de ambos os membros,

$$\begin{cases} a=2b & \cdots\cdots ① \\ -1=2c-b & \cdots\cdots ② \\ -4=-10-c & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

De ③, $c=-6$

Substituindo este valor em ②,

$-12-b=-1$

$b=-11$

Substituindo este valor em ①, $a=-22$

R.: $\boldsymbol{a=-22,\ b=-11,\ c=-6}$

(3) $a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)=x$

[Res.] Substituindo $x=1$ em ambos os membros, $2b=1$ e $b=\dfrac{1}{2}$

Substituindo $x=2$ em ambos os membros, $c=-2$

Substituindo $x=3$ em ambos os membros, $2a=3$ e $a=\dfrac{3}{2}$

R.: $\boldsymbol{a=\dfrac{3}{2},\ b=\dfrac{1}{2},\ c=-2}$

Nota:

Existem dois métodos para determinar o valor dos coeficientes para que a expressão seja uma identidade.

① O método de comparação dos coeficientes.

② O método de substituição do valor numérico.

Você encontrará o mesmo resultado utilizando qualquer um dos métodos.

J 184a Identidade e igualdade

(50 pontos)

Exemplo

Determine os valores de a e b para que x^3+ax^2+bx+1 seja divisível por x^2+x+1.

[Res.]: Seja $x+c$ o quociente

Quando uma expressão do 3º grau é dividida por uma expressão do 2º grau, o quociente é de 1º grau.

$$x^3+ax^2+bx+1=(x^2+x+1)(x+c)$$
$$=x^3+(c+1)x^2+(c+1)x+c$$

Desenvolver e ordenar em função de x.

Comparando-se os coeficientes de ambos os lados:

$$\begin{cases} a=c+1 & \cdots ① \\ b=c+1 & \cdots ② \\ c=1 & \cdots ③ \end{cases}$$

De ①, ②, e ③:

$a=2,\ b=2$

1. Determine os valores de a, b para que x^3+ax+b seja divisível por $(x-2)^2$.

[Res.] Seja $x+c$ o quociente.

$$x^3+ax+b=(x-2)^2(x+c)$$
$$=x^3+(c-4)x^2+(4-4c)x+4c$$

Comparando-se os seguintes coeficientes de ambos os membros,

$$\begin{cases} c-4=0 & \cdots ① \\ 4-4c=a & \cdots ② \\ 4c=b & \cdots ③ \end{cases}$$

De ①, ②, e ③:

$\boldsymbol{a=-12,\ b=16}$

J 184b

2. Determine os valores de a e b para que $x^4+6x^3+7x^2+ax+b$ seja um quadrado perfeito.

Dica Considere: $x^4+6x^3+7x^2+ax+b=(x^2+cx+d)^2$.

[Res.] $x^4+6x^3+7x^2+ax+b=(x^2+cx+d)^2$

$x^4+6x^3+7x^2+ax+b=x^4+2cx^3+(c^2+2d)x^2+2cdx+d^2$

Comparando-se os seguintes coeficientes de ambos os membros,

$$\begin{cases} 2c=6 & \cdots ① \\ c^2+2d=7 & \cdots ② \\ 2cd=a & \cdots ③ \\ d^2=b & \cdots ④ \end{cases}$$

De ①, $c=3$

Substituindo este valor em ②,

$3^2+2d=7$

$d=-1$

Substituindo $\boldsymbol{c=3}$ e $\boldsymbol{d=-1}$ em ③,

$2(3)(-1)=a$

$a=-6$

Substituindo $\boldsymbol{d=-1}$ em ④,

$(-1)^2=b$

$b=1$

R.: $\boldsymbol{a=-6,\ b=1}$

J 185a Identidade e igualdade

(50 pontos)

Determine os valores de x e y que satisfaçam sempre as seguintes igualdades para todos os valores de k.

Exemplo

$(k+2)x+(2k+3)y-3k+2=0$

[Res.] $(x+2y-3)k+(2x+3y+2)=0$ ☜ Ordenar em função de k.

$$\begin{cases} x+2y-3=0 & \cdots ① \\ 2x+3y+2=0 & \cdots ② \end{cases}$$ ☜ Aplicando o método de comparação dos coeficientes para $(x+2y-3)k+(2x+3y+2)=0\times k+0$ resulta ① e ②.

De ① e ②,

$$\begin{cases} x=-13 \\ y=8 \end{cases}$$

(1) $(k+1)x-(2k+3)y-3k-5=0$

[Res.] $kx+x-2ky-3y-3k-5=0$

$(x-2y-3)k+(x-3y-5)=0$

$$\begin{cases} x-2y-3=0 & \cdots ① \\ x-3y-5=0 & \cdots ② \end{cases}$$

De ① − ②,

$y+2=0$

$y=-2$

Substituindo este valor em ①,

$x-2(-2)-3=0$

$x=-1$

R.: $\boldsymbol{x=-1,\ y=-2}$

J 185b

(2) $x^2+y^2+(k-2)x-2ky-k-4=0$

[Res.] $x^2+y^2+kx-2x-2ky-k-4=0$

$$(x-2y-1)k+(x^2+y^2-2x-4)=0$$

$$\begin{cases} x-2y-1=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2-2x-4=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

De ①, $x=2y+1$ $\cdots\cdots ③$

Substituindo $x=2y+1$ em ②,

$$5y^2-5=0$$

$$y=\pm 1$$

Substituindo estes valores em ③,

Quando $y=1$, $x=2(1)+1=3$

Quando $y=-1$, $x=2(-1)+1=-1$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$

J 186a Identidade e igualdade

(50 pontos)

Exemplo

Determine os valores de a e b para que a seguinte expressão torne-se uma identidade.

$$\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$$

[Res]. $\dfrac{3x-1}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{a(x+3)+b(x-2)}{(x-2)(x+3)}$

☜ Reduza o 2º membro ao denominador comum.

$= \dfrac{(a+b)x+3a-2b}{(x-2)(x+3)}$

☜ Ordene o numerador em função de x.

Como os denominadores são iguais, comparamos apenas os coeficientes dos numeradores:

$$\begin{cases} a+b=3 & \cdots ① \\ 3a-2b=-1 & \cdots ② \end{cases}$$

De ① e ②, $a=1$, $b=2$

1. Determine os valores de a e b para que a seguinte expressão torne-se uma igualdade.

$$\frac{x-3}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

[Res.] $\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{(a+b)x-2a-b}{(x-1)(x-2)}$

Comparando-se apenas os coeficientes dos numeradores,

$$\begin{cases} a+b=1 & \cdots ① \\ -2a-b=-3 & \cdots ② \end{cases}$$

De ① e ②, $\boldsymbol{a=2}$, $\boldsymbol{b=-1}$

J 186b

2. Determine os valores de a, b e c para que a seguinte expressão torne-se uma igualdade.

$$\frac{4x-2}{x^3-3x^2+2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

[Res.]

$$(1º \text{ membro}) = \frac{4x-2}{x(x-1)(x-2)}$$

$$(2º \text{ membro}) = \frac{a(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)} + \frac{bx(x-2)}{x(x-1)(x-2)} + \frac{cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(a+b+c)x^2-(3a+2b+c)x+2a}{x(x-1)(x-2)}$$

Comparando-se apenas os coeficientes dos numeradores,

$$\begin{cases} a+b+c=0 & \cdots ① \\ -(3a+2b+c)=4 & \cdots ② \\ 2a=-2 & \cdots ③ \end{cases}$$

De ③, $a=-1$

Substituindo este valor em ① e ②,

$$-1+b+c=0 \quad \cdots ④$$

$$-(-3+2b+c)=4 \quad \cdots ⑤$$

De ④, $b=-c+1 \quad \cdots ⑥$

Substituindo ⑥ em ⑤,

$$-[-3+2(-c+1)+c]=4$$

$$c=3$$

Substituindo este valor em ⑥,

R.: $\boldsymbol{a=-1,\ b=-2,\ c=3}$

J 187a Identidade e igualdade

(33 pontos)

Prove que a seguinte igualdade é verdadeira.

Exemplo

$(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$

[Res.]

1º membro $= x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2=2x^2+2y^2$

2º membro $= 2x^2+2y^2$

Então, 1º membro = 2º membro.

(1) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

[Res.]

(1º membro) $= a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$

(2º membro) $= (a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)$

$= a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$

Então, (1º membro) = (2º membro).

J 187b

(2) $(x^2-1)(y^2-1)=(xy+1)^2-(x+y)^2$

[Res.]

(1º membro) $= x^2y^2-x^2-y^2+1$

(2º membro) $= (x^2y^2+2xy+1)-(x^2+2xy+y^2)$
$= x^2y^2+1-x^2-y^2$

Então, (1º membro) = (2º membro).

(3) $(a+b+c)(ab+bc+ca)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

[Res.]

(1º membro) $= [(a+b)+c][ab+c(a+b)]$
$= ab(a+b)+abc+c(a+b)^2+c^2(a+b)$
$= (a+b)[ab+(a+b)c+c^2]+abc$
$= (a+b)(a+c)(b+c)+abc$
$=$ (2º membro)

Então, (1º membro) = (2º membro).

Identidade e igualdade

(50 pontos)

Exemplo

Prove a seguinte igualdade quando $x+y=1$.

$x^2+y=y^2+x$

[Res.] De $x+y=1$, $y=-x+1$ ···①

1º membro $=x^2-x+1$ ☜ Substituir por ①.

2º membro $=(-x+1)^2+x$ ☜ Substituir por ①.

$=x^2-x+1$

Então, 1º membro = 2º membro.

1. Prove que, quando $a+b=1$, $a^2+b^2+1=2(a+b-ab)$.

[Res.] De $a+b=1$, $b=-a+1$ ·····①

(1º membro) $=a^2+(-a+1)^2+1=2a^2-2a+2$

(2º membro) $=2[a+(-a+1)-a(-a+1)]$

$=2(a^2-a+1)=2a^2-2a+2$

Então, (1º membro) = (2º membro).

Exemplo

Prove a seguinte igualdade quando $x+y=1$.

$x^2+y=y^2+x$

[Res.] 1º membro $-$ 2º membro $= x^2+y-y^2-x$

$$\begin{aligned} &= (x+y)(x-y)-(x-y) \\ &= (x-y)(x+y-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De $x+y=1$
$x+y-1=0$.

Então, 1º membro = 2º membro.

2. Prove que $a^2-bc=b^2-ca$ quando $a+b+c=0$.

[Res.] Mostrar que (1º membro) $-$ (2º membro) $= 0$.

$$\begin{aligned} \text{(1º membro)} - \text{(2º membro)} &= a^2-bc-b^2+ca \\ &= (a+b)(a-b)+c(a-b) \\ &= (a-b)(a+b+c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Então, (1º membro) = (2º membro).

Nota:
Se (1º membro) - (2º membro) $= 0$,
então (1º membro) = (2º membro) e $a^2-bc=b^2-ca$.

J 189a Identidade e igualdade

(50 pontos)

Exemplo

Prove que $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=0$, quando $a+b+c=0$.

[Res.] De $a+b+c=0$

$$\begin{cases} a+b=-c & \cdots ① \\ b+c=-a & \cdots ② \\ c+a=-b & \cdots ③ \end{cases}$$

Substituindo ①, ② e ③ no 1º membro,

1º membro $=(-c)(-a)(-b)+abc$

$=-abc+abc=0$

Então, 1º membro = 2º membro.

1. Prove que $\frac{1}{a}(b+c)+\frac{1}{b}(c+a)+\frac{1}{c}(a+b)+3=0$ quando $a+b+c=0$.

[Res.] De $a+b+c=0$

$$\begin{cases} a+b=-c & \cdots ① \\ b+c=-a & \cdots ② \\ c+a=-b & \cdots ③ \end{cases}$$

Substituindo ①, ② e ③ no 1º membro,

(1º membro) $=\frac{1}{a}(-a)+\frac{1}{b}(-b)+\frac{1}{c}(-c)+3$

$=-1-1-1+3=0=$ (2º membro)

Então, (1º membro) = (2º membro).

J 189b

2. Prove que quando $a+b+c=0$, a igualdade $a^3+b^3+c^3=3abc$ é verdadeira.

Dica De $a+b+c=0$, considere $c=-(a+b)$.

Mostrar que (1º membro) = (2º membro).

[Res.] Substituindo $c=-(a+b)$ no 1º membro,

$$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+[-(a+b)]^3$$

$$=a^3+b^3-(a+b)^3$$

$$=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$$

$$=-3a^2b-3ab^2$$

$$=-3ab(a+b)$$

Como $c=-(a+b)$, temos que $(a+b)=-c$.

$$=-3ab(-c)$$

$$=3abc$$

$$=2º \text{ membro}$$

(1º membro) = (2º membro), e $a^3+b^3+c^3=3abc$.

J 190a Identidade e igualdade

(33 pontos)

1. Determine os valores de a, b, c e d para que a expressão $x^3+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ torne-se uma identidade.

[Res.] (1º membro) $=ax^3+(-3a+b)x^2+(3a-2b+c)x+(-a+b-c+d)$

Comparando-se os seguintes coeficientes de ambos os membros,

$$\begin{cases} a=1 \\ -3a+b=0 \\ 3a-2b+c=0 \\ -a+b-c+d=1 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema,

$$\boldsymbol{a=1,\ b=3,\ c=3,\ d=2}$$

2. Prove que $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}=1$ quando $xy=1$.

[Res.] (1º membro) $=\dfrac{y+1+x+1}{(x+1)(y+1)}=\dfrac{x+y+2}{xy+x+y+1}$ ……①

Substituindo xy em ①,

(1º membro) $=\dfrac{x+y+2}{1+x+y+1}=\dfrac{x+y+2}{x+y+2}=1$

Então, (1º membro) = (2º membro).

Outra solução

Mostrar que (1º membro) − (2º membro) = 0.

$$\begin{aligned}(\text{1º membro})-(\text{2º membro}) &= \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}-1 \\ &= \frac{y+1+x+1-(x+1)(y+1)}{(x+1)(y+1)} \\ &= \frac{y+1+x+1-xy-x-y-1}{(x+1)(y+1)} \\ &= \frac{1-xy}{(x+1)(y+1)}=0 \leftarrow \text{Como } xy=1.\end{aligned}$$

J 190b

3. Prove que $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$, quando $a+b+c=0$.

Mostrar que (1º membro) = (2º membro).

[Res.] Como $a+b+c=0$, $c=-(a+b)$.

Substituindo este valor no (1º membro),

$$\begin{aligned}
(1º\text{ membro}) &= a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3 \\
&= a\left[\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right]+b\left[-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a}\right]-(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\
&= \frac{a^2}{b(a+b)}+\frac{b^2}{a(a+b)}-\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}+3 \\
&= \frac{a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3+3a^2b+3ab^2}{ab(a+b)} \\
&= \frac{0}{ab(a+b)} \\
&= (2º\text{ membro})
\end{aligned}$$

Então, (1º membro) = (2º membro) e

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0.$$

J 191a Igualdade e desigualdade

(33 pontos)

Dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, prove as seguintes igualdades como no exemplo.

Exemplo

$\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$ ..... ①

[Res.] Seja $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$,

Considere a razão dada como k, pois é número constante.

$a = bk,\ c = dk$ ..... ②

Substituindo ② em ①,

1º membro $= \frac{bk-b}{bk+b} = \frac{b(k-1)}{b(k+1)} = \frac{k-1}{k+1}$

2º membro $= \frac{dk-d}{dk+d} = \frac{d(k-1)}{d(k+1)} = \frac{k-1}{k+1}$

Portanto, 1º membro = 2º membro.

(1) $\frac{a+b}{a+2b} = \frac{c+d}{c+2d}$ ···①

[Res.] Seja $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, $a = bk,\ c = dk$ ···②

Substituindo ② em ①,

(1º membro) $= \frac{bk+b}{bk+2b} = \frac{b(k+1)}{b(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

(2º membro) $= \frac{dk+d}{dk+2d} = \frac{d(k+1)}{d(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

Portanto, 1º membro = 2º membro.

A expressão que indica a igualdade das razões $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, é chamada de expressão proporcional.

J 191b

(2) $\dfrac{a(a+c)}{b(b+d)} = \dfrac{c^2}{d^2}$ ···①

[Res.] Seja $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$, $a = bk$, $c = dk$ ····②

Substituindo ② em ①,

(1º membro) $= \dfrac{bk(bk+dk)}{b(b+d)} = \dfrac{bk^2(b+d)}{b(b+d)} = k^2$

(2º membro) $= \dfrac{(dk)^2}{d^2} = \dfrac{d^2k^2}{d^2} = k^2$

Portanto, 1º membro = 2º membro.

(3) $\dfrac{b^2+d^2}{a^2+c^2} = \dfrac{b^2-d^2}{a^2-c^2}$ ···① $(b^2 \neq d^2)$

[Res.] Seja $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$, $a = bk$, $c = dk$ ····②

Substituindo ② em ①,

(1º membro) $= \dfrac{b^2+d^2}{b^2k^2+d^2k^2} = \dfrac{b^2+d^2}{(b^2+d^2)k^2} = \dfrac{1}{k^2}$

(2º membro) $= \dfrac{b^2-d^2}{b^2k^2-d^2k^2} = \dfrac{b^2-d^2}{(b^2-d^2)k^2} = \dfrac{1}{k^2}$

Portanto, 1º membro = 2º membro.

Igualdade e desigualdade

(50 pontos)

Exemplo

Determine o valor de $\dfrac{x-y+z}{x+y+z}$ para $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$.

[Res.] Seja $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}=k$,

$x=2k$ ··· ①

$y=3k$ ··· ②

$z=4k$ ··· ③

Substituindo ①, ② e ③ na expressão dada, temos:

$$\frac{2k-3k+4k}{2k+3k+4k}=\frac{3k}{9k}=\frac{1}{3}$$

1. Determine o valor de $\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ para $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}$.

[Res.] Seja $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}=k$,

$x=3k$ ··· ①

$y=4k$ ··· ②

$z=5k$ ··· ③

Substituindo ①, ② e ③ na expressão dada, temos:

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{3k\cdot 4k+4k\cdot 5k+5k\cdot 3k}{(3k)^2+(4k)^2+(5k)^2}$$

$$=\frac{47k^2}{50k^2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{47}{50}}$$

Exemplo

Determine o valor de $\frac{3xy}{x^2-xy+y^2}$ para $\frac{x+2y}{4}=\frac{2x+y}{5}$.

[Res.] Seja $\frac{x+2y}{4}=\frac{2x+y}{5}=k$,

$$\begin{cases} x+2y=4k & \cdots ① \\ 2x+y=5k & \cdots ② \end{cases}$$

De ① e ②, $x=2k$ ··· ③

$y=k$ ··· ④

Substituindo ③ e ④ na expressão dada, temos:

$$\frac{3\cdot 2k\cdot k}{(2k)^2-2k\cdot k+k^2}=\frac{6k^2}{3k^2}=2$$

1. Determine o valor de $\frac{xy^2-x^2y}{x^3+y^3}$ quando $\frac{3x+2y}{7}=\frac{2x+3y}{8}$

[Res.] Seja $\frac{3x+2y}{7}=\frac{2x+3y}{8}=k$,

$$\begin{cases} 3x+2y=7k & \cdots ① \\ 2x+3y=8k & \cdots ② \end{cases}$$

De ① e ②, $x=k$ ··· ③

$y=2k$ ··· ④

Substituindo ③ e ④ na expressão dada,

$$\frac{xy^2-x^2y}{x^3+y^3}=\frac{k\cdot(2k)^2-k^2\cdot 2k}{k^3+(2k)^3}=\frac{2k^3}{9k^3}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

J 193a Igualdade e desigualdade

(33 pontos)

Exemplo

Determine o valor de $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$ para $a+b+c\neq 0$.

[Res.] Seja $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}=k$, Basta determinar o valor de k.

$$\begin{cases} b+c=ak & \cdots\cdots ① \\ c+a=bk & \cdots\cdots ② \\ a+b=ck & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

De ①+②+③,

$2(a+b+c)=(a+b+c)k$ Como $a+b+c\neq 0$, dividimos ambos os lados da equação por $(a+b+c)$.

$k=2$

Portanto, $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}=2$.

1. Determine o valor de $\frac{c}{a+3b}=\frac{a}{b+3c}=\frac{b}{c+3a}$ para $a+b+c\neq 0$.

[Res.] Seja $\frac{c}{a+3b}=\frac{a}{b+3c}=\frac{b}{c+3a}=k$,

$$\begin{cases} c=(a+3b)k & \cdots ① \\ a=(b+3c)k & \cdots ② \\ b=(c+3a)k & \cdots ③ \end{cases}$$

De ①+②+③,

$a+b+c=4(a+b+c)k$

Como $a+b+c\neq 0$, $k=\frac{1}{4}$.

Portanto, o valor é $\frac{1}{4}$.

J 193b

2. Determine o valor de $\frac{bc+ca}{ab}=\frac{ca+ab}{bc}=\frac{ab+bc}{ca}$, em cada um dos seguintes casos.

(1) Quando $ab+bc+ca\neq 0$.

[Res.] Seja $\frac{bc+ca}{ab}=\frac{ca+ab}{bc}=\frac{ab+bc}{ca}=k$,

$$\begin{cases} bc+ca=kab & \cdots ① \\ ca+ab=kbc & \cdots ② \\ ab+bc=kca & \cdots ③ \end{cases}$$

De ①+②+③,

$2(ab+bc+ca)=k(ab+bc+ca)$

Como $ab+bc+ca\neq 0$, $k=2$.

Portanto, o valor é **2.**

(2) Quando $ab+bc+ca=0$.

[Res.] De $ab+bc+ca=0$,

$$\begin{cases} bc+ca=-ab & \cdots ① \\ ca+ab=-bc & \cdots ② \\ ab+bc=-ca & \cdots ③ \end{cases}$$

Substituindo ①, ② e ③ na proporção,

$$\frac{-ab}{ab}=\frac{-bc}{bc}=\frac{-ca}{ca}=-1$$

Como $ab+bc+ca=0$, $k=-1$.

Portanto, o valor é $\mathbf{-1}$.

J 194a Igualdade e desigualdade

(50 pontos)

Exemplo

Prove a desigualdade $4x+2y>2x+4y$ quando $x>y$.

[Res.] (1º membro) − (2º membro)

$= (4x+2y)-(2x+4y)$

$= 2x-2y$

$= 2(x-y)$

De $x>y$, $x-y>0$.

Então, (1º membro) − (2º membro) >0.

Portanto, $4x+2y>2x+4y$ é verdadeira.

Prove que (1º membro) − (2º membro) >0.

1. Prove a desigualdade $\frac{x+y}{2}>\frac{2x+3y}{5}$ para $x>y$.

[Res.] (1º membro) − (2º membro) $= \frac{x+y}{2}-\frac{2x+3y}{5}$

$= \frac{x-y}{10}$

De $x>y$, $x-y>0$.

Portanto $\frac{x-y}{10}>0$.

Sendo assim, (1º membro) − (2º membro) >0

Portanto, $\frac{x+y}{2}>\frac{2x+3y}{5}$ é verdadeira.

Exemplo

Prove a desigualdade $x^2 > x - 1$.

[Res.] (1º membro) $-$ (2º membro) $= x^2 - x + 1$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Como $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$.

Então, (1º membro) $-$ (2º membro) > 0.

Portanto, $x^2 > x - 1$ é verdadeira.

1. Prove a desigualdade $x^2 > 2x - 3$.

[Res.] (1º membro) $-$ (2º membro) $= x^2 - 2x + 3$

$$= (x-1)^2 + 2$$

Como $(x-1)^2 \geq 0$, $(x-1)^2 + 2 \geq 2 > 0$.

Então , (1º membro) $-$ (2º membro) > 0.

Portanto, $x^2 > 2x - 3$ é verdadeira.

J 195a Igualdade e desigualdade

(50 pontos)

Prove a desigualdade e determine quando ocorre a igualdade.

Exemplo

$a^2+b^2 \geq 2ab$

[Res.]

(1º membro) − (2º membro) $= a^2+b^2-2ab$ ☜ Prove que (1º membro)-(2º membro) ≥ 0.

$= (a-b)^2 \geq 0$ ☜ A igualdade ocorre quando: $a-b=0$.

Então, (1º membro) − (2º membro) ≥ 0.

Portanto, $a^2+b^2 \geq 2ab$.

A igualdade ocorre quando $a=b$. ☜ De $a-b=0$, $a=b$.

1. $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

[Res.] (1º membro) − (2º membro) =

$$= (a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$$
$$= (a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2)-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$$
$$= a^2y^2-2abxy+b^2x^2$$
$$= (ay-bx)^2 \geq 0$$

Então, (1º membro) − (2º membro) ≥ 0.

Portanto, $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$.

A igualdade ocorre quando $ay=bx$.

J 195b

Prove a seguinte desigualdade e determine quando ocorre a igualdade.

Exemplo

$a^2+b^2 \geq ab$

[Res.] (1º membro) $-$ (2º membro) $= a^2+b^2-ab$

$$= \left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2$$

Como $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0$, $\frac{3}{4}b^2 \geq 0$,

$\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$. ☜ A igualdade ocorre quando: $a-\frac{1}{2}b=0$ e $\frac{3}{4}b^2=0$.

Então, (1º membro) $-$ (2º membro) ≥ 0.

Portanto, $a^2+b^2 \geq ab$.

A igualdade ocorre quando ☜ $a=b=0$.

De $\frac{3}{4}b^2=0$, $b=0$.

De $a-\frac{1}{2}b=0$, $a=\frac{1}{2}b$, $a=0$.

1. $a^2+b^2 \geq 2(a-b-1)$

[Res.] (1º membro) $-$ (2º membro) $= a^2+b^2-2(a-b-1)$

$$= a^2-2a+b^2+2b+2$$
$$= (a-1)^2+(b+1)^2$$

Como $(a-1)^2 \geq 0$ e $(b+1)^2 \geq 0$,

$(a-1)^2+(b+1)^2 \geq 0$.

Então, (1º membro) $-$ (2º membro) ≥ 0.

Portanto, $a^2+b^2 \geq 2(a-b-1)$.

A igualdade ocorre quando $a=1$, $b=-1$.

J 196a Igualdade e desigualdade

(33 pontos)

Prove a seguinte desigualdade e determine quando ocorre a igualdade.

Exemplo

$\frac{1}{2} \geq 2ab$, para $a+b=1$.

[Res.]: De $a+b=1$, substituindo $b=1-a$.

$$(1º \text{ membro}) - (2º \text{ membro}) = \frac{1}{2} - 2a(1-a) \quad \text{Substituindo } b=1-a.$$

$$= 2a^2 - 2a + \frac{1}{2}$$

$$= 2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad \text{A igualdade ocorre quando } a-\frac{1}{2}=0.$$

Como $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, então $2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.

Assim, (1º membro) − (2º membro) ≥ 0.

Portanto, $\frac{1}{2} \geq 2ab$.

A igualdade ocorre quando $a=b=\frac{1}{2}$. De $a-\frac{1}{2}=0$, e $a+b=1$, temos que $a=\frac{1}{2}$ e $b=\frac{1}{2}$.

1. $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ para $a+b=1$.

[Res.] De $a+b=1$ e $b=1-a$

$$(1º \text{ membro}) - (2º \text{ membro}) = a^2 + (1-a)^2 - \frac{1}{2}$$

$$= 2a^2 - 2a + \frac{1}{2}$$

$$= 2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

Então, (1º membro) − (2º membro) ≥ 0.

Portanto, $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$.

A igualdade ocorre quando $a=b=\frac{1}{2}$.

J 196b

2. Prove as seguintes desigualdades:

(1) $a^2+b^2>ab$ para $a+b=1$.

[Res.] De $a+b=1$ e $b=1-a$

$$(1º \text{ membro}) - (2º \text{ membro}) = a^2+(1-a)^2-a(1-a)$$
$$= 3a^2-3a+1$$
$$= 3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

Como $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, $3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} > 0$

Então, (1º membro) − (2º membro) > 0.

Portanto, $a^2+b^2>ab$.

(2) $a+b>ab$ para $a+b=1$.

[Res.] De $a+b=1$ e $b=1-a$

$$(1º \text{ membro}) - (2º \text{ membro}) = a+(1-a)-a(1-a)$$
$$= a^2-a+1$$
$$= \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Como $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$.

Então, (1º membro) − (2º membro) > 0.

Portanto, $a+b>ab$.

J 197a Igualdade e desigualdade

(50 pontos)

1. Prove a desigualdade para $a>0$, $b>0$ e determine quando ocorre igualdade.

Exemplo

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

[Res.] $\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}{2}$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

Como $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$, ☜ Da condição inicial do exercício: $a>0$ e $b>0$.

Então, $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$. ☜ A igualdade ocorre quando $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$.

Portanto, $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

A igualdade ocorre quando $a=b$. ☜ De $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, $a=b$.

(1) $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$

[Res.] $\sqrt{ab}-\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{\sqrt{ab}\,(a+b)-2ab}{a+b}=\dfrac{\sqrt{ab}\,(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$

$$=\frac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}$$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

$\sqrt{ab}>0$ e $a+b>0$

Então, $\dfrac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \geq 0$.

Portanto, $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$.

De $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, a igualdade ocorre quando $a=b$.

J 197b

Dados dois números positivos a, b, diz-se que $\frac{a+b}{2}$ é a média aritmética e que $\sqrt{ab}$ é a média geométrica.

Relação entre média aritmética e média geométrica

Quando, $a>0$, $b>0$, temos $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

E a igualdade ocorre quando $a=b$.

$$\begin{pmatrix}\text{Média}\\ \text{Aritmética}\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}\text{Média}\\ \text{Geométrica}\end{pmatrix}$$

Pode-se utilizar esta relação nas provas.

Exemplo

Prove a desigualdade $x+\frac{1}{x}\geq 2$, e determine quando ocorre a igualdade para $x>0$.

[Res.](1º membro) ÷ 2, utilizando (média aritmética) ≥ (média geométrica):

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\geq\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$$

Em $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, considerar a como x, e b como o $\frac{1}{x}$.

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\geq 1$$

Portanto, $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

A igualdade ocorre quando $x=1$.

A igualdade ocorre quando $a=b$, portanto, $x=\frac{1}{x}$.

2. Prove a seguinte desigualdade quando $x>0$, $y>0$ e determine quando ocorre a igualdade.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$$

[Res.] (1º membro) ÷ 2

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{2}\geq\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}},\qquad \frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{2}\geq 1$$

Portanto, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$.

A igualdade ocorre quando $x=y$.

J 198a Igualdade e desigualdade

(33 pontos)

1. Prove as seguintes desigualdades, quando $a > 0$ e determine quando ocorre a igualdade.

(1) $a + \frac{9}{a} \geq 6$

[Res.] $\frac{a + \frac{9}{a}}{2} \geq \sqrt{a . \frac{9}{a}}$

$\frac{a + \frac{9}{a}}{2} \geq 3$

Portanto, $a + \frac{9}{a} \geq 6$.

A igualdade ocorre quando $a = 3$.

(2) $2a + \frac{1}{8a} \geq 1$

[Res.] $\frac{2a + \frac{1}{8a}}{2} \geq \sqrt{2a . \frac{1}{8a}}$

$\frac{2a + \frac{1}{8a}}{2} \geq \frac{1}{2}$

Portanto, $2a + \frac{1}{8a} \geq 1$.

A igualdade ocorre quando $a = \frac{1}{4}$.

J 198b

2. Prove a seguinte desigualdade quando $a>0$, $b>0$ e determine quando ocorre a igualdade.

Exemplo

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4$$

[Res.]

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)=2+ab+\frac{1}{ab}$$

De $a>0$ e $b>0$, $\quad ab>0$ e $\frac{1}{ab}>0$.

Portanto, $2+ab+\frac{1}{ab}\geq 2+2\sqrt{ab\times\frac{1}{ab}}$

$=2+2$

$=4$

Considerando $ab=A$, $\frac{1}{ab}=B$ pela relação (média aritmética)≥(média geométrica), podemos provar $A+B\geq 2\sqrt{AB}$.

Então, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4$.

A igualdade ocorre quando $ab=1$.

A igualdade ocorre quando A = B, portanto, $ab=\frac{1}{ab}$.

(1) $\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right)\geq 18$

[Res.] $\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right)=10+ab+\frac{16}{ab}$

De $a>0$ e $b>0$,

$ab>0$ e $\frac{16}{ab}>0$.

Portanto, $10+ab+\frac{16}{ab}\geq 10+2\sqrt{ab\times\frac{16}{ab}}$

$=10+8$

$=18$

Então, $\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right)\geq 18$.

A igualdade ocorre quando $ab=4$.

KUMON J 199a

Igualdade e desigualdade

(20 pontos)

1. Prove a desigualdade $\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$ quando $a>0$, e determine quando ocorre a igualdade.

[Res.] $\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

De $a>0$ e $b>0$,

$\frac{a}{b}>0$ e $\frac{b}{a}>0$.

Portanto,

$2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=4$

E, então, $\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$.

A igualdade ocorre quando $a=b$.

2. Prove a desigualdade $\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\geq 4$ para $a>0$, $b>0$, $c>0$ e $d>0$ e determine quando ocorre a igualdade.

[Res.] $\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=2+\frac{bc}{ad}+\frac{ad}{bc}$

De $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$, temos:

$\frac{bc}{ad}>0$ e $\frac{ad}{bc}>0$.

Portanto,

$2+\frac{bc}{ad}+\frac{ad}{bc}\geq 2+2\sqrt{\frac{bc}{ad}\cdot\frac{ad}{bc}}=4$

E, então, $\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\geq 4$.

A igualdade ocorre quando $ad=bc$.

J 199b

Vamos pensar!

Podemos provar a desigualdade $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4$, com $a>0$ e $b>0$, separando os produtos e aplicando a relação entre média aritmética e média geométrica: $\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\sqrt{ab}$.

De $a>0$ e $b>0$, $\frac{1}{a}>0$ e $\frac{1}{b}>0$.

$a+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{b}}=2\sqrt{\frac{a}{b}}$ e, de $a=\frac{1}{b}$, (1º membro) = (2º membro) quando $ab=\boxed{1}$.

$b+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{a}}=2\sqrt{\frac{b}{a}}$ e, de $b=\frac{1}{a}$, (1º membro) = (2º membro) quando $ab=\boxed{1}$.

Multiplicando ambos os lados da desigualdade,

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}}=4\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=4$

Portanto, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4$, e (1º membro) = (2º membro) quando $ab=\boxed{1}$.

Agora, vamos provar a desigualdade $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)\geq 9$ utilizando o método mostrado acima.

$a+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ e, de $a=\frac{1}{b}$, (1º membro) = (2º membro) quando $ab=\boxed{1}$ ··· ①

$b+\frac{4}{a}\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{4}{a}}=4\sqrt{\frac{b}{a}}$ e, de $b=\frac{4}{a}$, (1º membro) = (2º membro) quando $ab=\boxed{4}$ ··· ②

Multiplicando ambos os lados da desigualdade,

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot 4\sqrt{\frac{b}{a}}=\boxed{8}$ ··· ③

Observe que a inequação é diferente da original. Além disso, como não existe valor de a e b que satisfaça ① e ② simultaneamente, a inequação ③ não é válida. Portanto, não podemos provar a desigualdade utilizando este método.

Neste caso, primeiro temos que desenvolver o produto e depois usar a relação entre a média aritmética e média geométrica para provar a inequação como no exemplo do J198b.

R.: 1, 1, 1, 1, 4, 8

J 200a Igualdade e desigualdade

(33 pontos)

1. Determine o valor de $\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ para $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}$.

[Res.] Seja $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{5}=k$

$$\begin{cases} x+y=3k \quad \cdots\cdots ① \\ y+z=4k \quad \cdots\cdots ② \\ z+x=5k \quad \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

De ① − ②, $x-z=-k \quad \cdots\cdots ④$

De ③ + ④, $x=2k$

Substituindo este valor em ①, $y=3k-2k=k$.

Substituindo este valor em ②, $z=4k-k=3k$.

Substituindo $x=2k$, $y=k$, $z=3k$ na expressão original, obtemos:

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{2k^2+3k^2+6k^2}{4k^2+k^2+9k^2}=\frac{11k^2}{14k^2}=\frac{11}{14}$$

R.: $\dfrac{11}{14}$

2. Prove a desigualdade $\left(a+b\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)\geq 9$ quando $a>0$ e $b>0$ e determine quando ocorre a igualdade.

[Res.] $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)=5+\dfrac{4a}{b}+\dfrac{b}{a}$

De $a>0$, $b>0$, $\dfrac{4a}{b}>0$ e $\dfrac{b}{a}>0$.

Portanto, $5+\dfrac{4a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 5+2\sqrt{\dfrac{4a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=5+4=9$

E, então, $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)\geq 9$.

A igualdade ocorre quando $2a=b$.

3. Prove a desigualdade $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ e determine quando ocorre a igualdade.

[Res.] (1º membro) − (2º membro) $= a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$$= a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2)$$

$$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2-\frac{(b+c)^2}{4}+b^2-bc+c^2$$

$$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3b^2-6bc+3c^2}{4}$$

$$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b^2-2bc+c^2)$$

$$= \left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2 \geq 0$$

Então, (1º membro) − (2º membro) ≥ 0.

Portanto $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

A igualdade ocorre quando $a=b=c$, pois $a-\frac{b+c}{2}=0$, $b-c=0$.

Solução alternativa

Outra solução para provar a inequação $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

[Res.]

(1º membro) − (2º membro) =

$$= (a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$$

$$= \frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(\ \boldsymbol{b^2-2bc+c^2}\ )+(\ \boldsymbol{c^2-2ca+a^2}\ )]$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(\ \boldsymbol{b-c}\ )^2+(\ \boldsymbol{c-a}\ )^2] \geq 0$$

Então, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

A igualdade ocorre quando $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$. Isto é, quando $a=b=c$.

MATEMÁTICA ESTÁGIO J - Gabarito com resolução (2ª PARTE)
Copyright © 2002 Kumon Instituto de Educação
Impresso no Brasil.

MATEMÁTICA - Gabarito com resolução (2ª PARTE)

J

CÓD.:11114 J-CC-0908